

Theoretische Physik

Inhalt der Vorlesung von P. H. Richter zum Masterkurs
„Fortgeschrittene Theoretische Physik“

Bremen, Wintersemester 2008/09

Inhaltsverzeichnis

1	Mechanik	6
1.1	Freie Bewegung und Geodäten	7
1.2	Phasenraumstruktur	12
1.2.1	Die kanonischen Bewegungsgleichungen	12
1.2.2	Flüsse und Vektorfelder	15
1.2.3	Integrale und „chaotische“ Bewegung	16
2	Hydrodynamik	20
2.1	Ideale Fluide	21
2.1.1	Grundgleichungen	21
2.1.2	Wirbelstärke, Potentialströmung	24
2.1.3	Kräfte bei Potentialströmung	27
2.2	Viskose Fluide: Navier-Stokes-Gleichungen	29
2.3	Wärmeleitung in Fluiden. Diffusion	33
2.4	Schall	35
2.5	Die hydrodynamischen Moden im Gleichgewicht	36
3	Spezielle Relativitätstheorie	40
3.1	Minkowski-Raumzeit und Kinematik	40
3.1.1	Lorentz-Transformationen	41
3.1.2	Die Lorentz-Gruppe	42
3.1.3	Skalare und 4-Vektoren	46
3.2	Mechanik	47
3.2.1	Impuls und Minkowski-Kraft	47
3.2.2	Lagrange-Funktion	49
3.3	Elektrodynamik	51
3.3.1	Die Maxwell-Gleichungen	51
3.3.2	Bewegung geladener Teilchen	54
3.3.3	Die Wirkung des elektromagnetischen Feldes	58
3.3.4	Der Energie-Impuls-Tensor	61
3.3.5	Wellen und Strahlung	64

4	Randwertprobleme: Greensche Funktionen	68
5	Statistische Physik	69
5.1	Grundlage der Statistik	70
5.2	Bose-Statistik	72
5.2.1	Photonen und Phononen	72
5.2.2	Bosonen mit Masse	73
5.3	Fermi-Statistik	76
6	Phasenübergänge und Renormierung	77
6.1	Kritische Indizes/Exponenten	79
6.2	Die RG-Theorie am Beispiel des 2D-Ising-Modells	86
6.3	Weitere Anmerkungen zur RG-Theorie	95

Einleitung

Im Wintersemester 2008/2009 wurde an der Universität Bremen zum ersten Mal ein Master-Programm im Studiengang Physik angeboten. Die Vorlesung, deren wichtigste Teile in diesem Skript festgehalten sind, sollte eine Ergänzung sein zu dem, was in den vorangegangenen Bachelor-Kursen an Theoretischer Physik vermittelt wurde. Ergänzung heißt zum Einen, dass Lücken aufgefüllt wurden, die in den Kursen geblieben waren, zum Anderen wurden neue Themen behandelt. Im Großen und Ganzen handelte es sich aber immer noch um einen elementaren Kurs der Theoretischen Physik.

Die Inhalte wurden mit den Hörern abgestimmt und können insofern nicht als Richtschnur für spätere Jahrgänge gelten. Zum Beispiel hatten die Studierenden dieses Jahrgangs eine recht ausführliche Quantenmechanik gehört und fanden, dass hier keine Lücken mehr zu füllen waren, zumal die Parallelvorlesung zur Theoretischen Festkörperphysik und die im Sommersemester folgende Relativistische Quantentheorie ausreichend viel Quantenmechanik anboten. Dagegen wünschten sich die Hörer eine ausgiebige Behandlung der Statistischen Physik, da dieser Kurs ihnen nicht weit genug gegangen war. Ähnlich verhielt es sich mit der Relativitätstheorie und mit der Behandlung von Randwertproblemen mittels Greenscher Funktionen. Die Kapitel Hydrodynamik und Phasenübergänge waren dagegen ergänzende Angebote, von denen im Bachelor-Studium gar nicht die Rede gewesen war. So ergaben sich sechs Kapitel, die im Folgenden kurz beschrieben werden.

Dieses Skript enthält nur einen Teil dessen, was in der Vorlesung vorgetragen wurde, dieses dann aber sorgfältiger ausformuliert. Mit einigen Abschnitten hielt ich mich so eng an die angegebene Literatur (z. B. im Kapitel über die Greenschen Funktionen), dass sich ein Aufschreiben hier erübrigt.

Ohnehin ist für den Hörer nur das ergiebig im Hinblick auf das Lernen, was er oder sie selbst aufgeschrieben und nachgearbeitet hat. Insofern ist dieses Skript allenfalls als Erinnerungsstück von Wert.

1. Mechanik.

Hier wurden zwei Aspekte vertieft. Der erste Abschnitt über geodätische Bewegung auf Mannigfaltigkeiten gab Gelegenheit, Begriffe der Differentialgeometrie einzuführen, die bei späteren Kursen zur Allgemeinen Relativitätstheorie meist Anfangsschwierigkeiten verursachen und dadurch von den eigentlichen Gedanken ablenken. Sie gehören aber eigentlich noch zur klassischen Mechanik. Im zweiten Abschnitt wurde die Diskussion der Phasenraumstruktur vertieft im Hinblick auf die Theorie kanonischer Transformationen und auf die Identifikation invarianter Untermannigfaltigkeiten.

Literatur:

H. Stephani, Theoretische Mechanik: Punkt- und Kontinuumsmechanik, Spektrum Akademie Verlag, Heidelberg 1995

V. I. Arnold, Mathematical Methods of classical mechanics, Springer, New York 2001

2. Hydrodynamik.

Dieses Kapitel hat im Bachelor-Programm keinen Platz und ist doch aus vielen Gründen ein wichtiger Teil der Theoretischen Physik, zumal wenn es um Themen aus den Bereichen Ozean- und Atmosphärenphysik geht, aber auch um Biophysik. Von der Natur der hydrodynamischen Grundgleichungen als den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie sollte jeder Physiker gute Kenntnis haben. Das Zusammenspiel von konvektiven (reaktiven) und dissipativen Prozessen ist ein wichtiges Grundmotiv, ebenso der Unterschied von propagierenden und diffusiven Moden in der linearen Umgebung des Gleichgewichts. Für eine systematische Darstellung der linearen Antworttheorie blieb leider ebensowenig Zeit wie für eine Diskussion nichtlinearer Phänomene wie Rayleigh-Bénard- oder Taylor-Instabilität, von der Turbulenz ganz zu schweigen.

Literatur:

L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Elsevier, Amsterdam 2007
D. Forster, Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry, and Correlation Functions, Benjamin, London 1975

3. Spezielle Relativitätstheorie.

Hier wurde in Kürze die Minkowski-Raum-Zeit diskutiert und dann zuerst die relativistische Mechanik behandelt. Den größeren Teil dieses Kapitels nahm die relativistische Formulierung der Elektrodynamik ein, wobei es mir auf die Herleitung der Grundgleichungen (Maxwell und Lorentz) aus einem Wirkungs-Prinzip ankam sowie auf die Einführung des Energie-Impuls-Tensors, womit wiederum ein Baustein für die Allgemeine Relativitätstheorie bereitgestellt werden konnte. Schließlich wurden kurz noch Wellenausbreitung und Strahlung diskutiert.

Literatur:

J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, Wiley, New York 1999
L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Klassische Feldtheorie, Akademie-Verlag, Berlin 1989
R. A. D’Inverno, Introducing Einstein’s relativity, Clarendon Press, Oxford 2005

4. Randwertprobleme und Greensche Funktionen.

Dieses kurze Kapitel behandelt die Methode der Greenschen Funktionen und ihrer Berechnung z. B. mit Hilfe von Eigenfunktionen des zugehörigen homogenen Problems für Gebiete mit Berandung. Leider ist das Eigenwertproblem nur für wenige Typen von Rändern durch Separation in eindimensionale Unterprobleme lösbar, etwa für Kugel- oder Zylindersymmetrie.

Literatur:

J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, Wiley, New York 1999

5. Statistische Physik.

Hier wurde zunächst an die Grundlagen erinnert, und dann wurden die Standardthemen der Bose- und Fermi-Statistik ausführlich abgearbeitet, allerdings nur für die diversen idealen Gase. Konsequenzen von Wechselwirkungen zwischen den Teilchen, etwa in Form einer Virialentwicklung, wurden nicht behandelt, auch nicht Probleme der Nichtgleichgewichts-Statistik.

Literatur:

F. Schwabl, Statistische Mechanik, Springer, Berlin 2006

L. D. Landau, E. M. Lifshitz, Statistical Physics, Pergamon Press, Oxford 2001

6. Phasenübergänge und Renormierung.

Zunächst wurde die Phänomenologie des kritischen Verhaltens bei Phasenübergängen zweiter Ordnung diskutiert, anschließend die Molekularfeld-Theorie ohne und mit Einfluss von Fluktuationen. Die Grundidee der Renormierungstheorie und ihre einzelnen Schritte von der partiellen Ausführung der Zustandssumme über die Identifikation einer Renormierungsabbildung bis hin zur Auswertung der Homogenitäts-Eigenschaften der freien Energie in der Umgebung eines instabilen Fixpunkts wurden am Beispiel des zweidimensionalen Ising-Modells vorgeführt (in deutlich besserer Näherung als in Schwabls Buch).

Literatur:

F. Schwabl, Statistische Mechanik, Springer, Berlin 2006

1 Mechanik

Die klassische Mechanik hat seit Newtons Principia von 1687 eine lange Entwicklung mit etlichen grundlegenden Metamorphosen durchgemacht. Die wichtigsten Schritte waren folgende:

1. Newtons zweites Gesetz $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$ ist eine differentielle Beschreibung der Bewegung im Konfigurationsraum (ursprünglich ist das für jedes Teilchen ein 3D euklidischer Raum, später, nach d'Alembert, eine Mannigfaltigkeit aus verallgemeinerten Koordinaten). Ihr liegt die Annahme des Kausalprinzips zugrunde: in jedem Moment bestimmt die wirkende Kraft \mathbf{F} , wie sich der Bewegungszustand ändert.
2. Das Hamiltonsche Prinzip $\delta W = 0$ mit der Wirkung $W = \int_{\mathbf{q}(t_0)}^{\mathbf{q}(t_1)} L dt$ und der Lagrange-Funktion $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ beschreibt die Bahn im Konfigurationsraum vom Anfangspunkt $\mathbf{q}(t_0)$ zum Endpunkt $\mathbf{q}(t_1)$ durch ein Variationsprinzip, d. h. in integraler Form. Ihm liegt die Vorstellung einer zielgerichteten (teleologisch konzipierten) Welt zugrunde. Leitet man daraus die Euler-Lagrange-Gleichungen her, $\mathbf{p} = \partial L / \partial \dot{\mathbf{q}}$ und $\dot{\mathbf{p}} = \partial L / \partial \mathbf{q}$, dann hat man wieder die Newtonsche Form.
3. Eine Variante des Variationsprinzips beschreibt die freie Bewegung eines Systems (also die Bewegung, die allein durch die kinetische Energie gegeben ist, $L = T = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$) als geodätische Bewegung im Konfigurationsraum, der mit der Metrik $g_{\alpha,\beta}(\mathbf{q})$ ausgestattet ist. Eine weitere Variante erlaubt sogar, eine Metrik einzuführen, in der auch die potentielle Energie berücksichtigt ist, so dass die volle physikalische Bewegung wieder eine geodätische Bewegung ist.
4. Die Hamilton-Funktion lebt im Phasenraum der kanonischen Variablen \mathbf{q}, \mathbf{p} und erlaubt dort eine größere Klasse möglicher Transformationen, um die Bewegungsgleichungen zu „trivialisieren“. Das gelingt bei integrierbaren Systemen mit Hilfe der sogenannten Wirkungs-Winkel-Variablen $\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}$, wobei die H -Funktion dann die einfache Gestalt $H = H(\mathbf{I})$ annimmt; die kanonischen Gleichungen liefern dann mit $\dot{\mathbf{I}} = \partial H / \partial \mathbf{I} = 0$ die Konstanz der Wirkungen und mit $\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\partial H / \partial \mathbf{I}$ konstante Geschwindigkeiten der Winkel.
5. Poincaré erkannte, dass die wenigsten Hamilton-Funktionen integrierbare Gleichungen liefern: in der Regel ist die Zahl der Erhaltungsgrößen kleiner als die Zahl der Freiheitsgrade. Dann haben die typischen invarianten Mengen im Phasenraum, also die Mengen von Punkten, innerhalb der für gegebene Anfangsbedingungen eine langfristige Vorhersage

möglich ist, eine höhere Dimension als bei integrablen Systemen: das bezeichnet man dann als „chaotisches“ Verhalten.

6. Einstein führte mit der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) eine neue Raum-Zeit-Struktur ein und mit der Allgemeinen (ART) stellte er den Begriff der Metrik in den Mittelpunkt. Für ihre Krümmung fand er einen Zusammenhang mit dem Energie-Impuls-Tensor der vorhandenen Materie.
7. Im 20. Jahrhundert entwickelte sich die klassische Mechanik einerseits zur sog. symplektischen Geometrie, andererseits zu einer weitgehend computergestützten Theorie dynamischer Systeme. Durch die Mathematisierung, die mit dem Ausbau der symplektischen Geometrie einherging, ging m. E. der Bezug zur Physik verloren. Die numerischen und graphischen Studien komplexer Systeme führten allerdings zu vertieftem Verständnis auch quantenmechanischer Systeme mit chaotischem Charakter.

Im Folgenden sollen einige wenige Aspekte diskutiert werden, die so nicht in der Grundvorlesung zur Mechanik vorkamen und in den angegebenen Büchern nicht in kompakter Form präsentiert werden.

1.1 Freie Bewegung und Geodäten

Sei die kinetische Energie eines Systems mit Koordinaten $q = (q^1, q^2, \dots, q^n)$ gegeben durch die quadratische Form¹

$$T = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta. \quad (1.1)$$

Ein Wort zur Notation. Bei Koordinaten mit oberen Indizes möge man an „normale“ Vektoren denken, auch wenn die q als Punkte des Konfigurationsraums nicht unbedingt Vektoren sind; die Differentiale dq^α und die Geschwindigkeiten \dot{q}^α sind allerdings Vektoren im jeweiligen Tangentialraum an den Konfigurationsraum bei q . Die $g_{\alpha\beta}(q)$ sind Matrizen, und über doppelt auftretende Indizes wird summiert, wenn einer unten und der andere oben steht. Mit Hilfe von

$$q_\alpha := g_{\alpha\beta} q^\beta \quad (1.2)$$

definiert man sogenannte „kovariante“ Vektoren (q_α) im Unterschied zu den „kontravarianten“ Vektoren (q^α). Skalarprodukte kann man nur zwischen einem kovarianten und einem kontravarianten Vektor bilden, insbesondere lässt

¹Mit q ohne Index sei der Punkt im Konfigurationsraum gemeint; ich verzichte hier auf den bisher benutzten Fettdruck.

sich die kinetische Energie (1.1) auch als

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha \dot{q}^\alpha \quad (1.3)$$

schreiben. Die Bildung $\dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$ ist statt dessen als ein dyadisches Produkt zu verstehen. Man bezeichnet es auch als kontravarianten Tensor zweiter Stufe, weil es als direktes Produkt zweier kontravarianter Vektoren (= Tensoren erster Stufe) aufgebaut ist. Analog kann man durch $\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$ einen kovarianten Tensor zweiter Stufe definieren. Allgemein bezeichnet man in der Physik ein Objekt $T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ als einen kontravarianten Tensor n -ter Stufe, wenn er sich bzgl. jedes seiner Indizes bei Transformationen wie ein kontravarianter Vektor verhält.² Analog ist $T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ ein kovarianter Tensor n -ter Stufe, wenn er sich bzgl. jedes seiner Indizes bei Transformationen wie ein kovarianter Vektor verhält. Außerdem gibt es gemischte Tensoren z. B. der Art $T^\alpha_{\beta\gamma}$, deren Transformationsverhalten bzgl. der jeweiligen Indizes durch ihre Stellung gegeben ist. Es ist im Rahmen dieser Notation konsistent, als $g^{\alpha\beta}$ die zu $g_{\alpha\beta}$ inverse Matrix zu nehmen; denn mit (1.2) gilt

$$q^\alpha := g^{\alpha\beta} q_\beta \quad \text{wobei} \quad g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \quad (1.4)$$

und δ^α_γ die Einheitsmatrix ist, $\delta^\alpha_\gamma q^\gamma = q^\alpha$. Nehmen wir als Beispiel die sphärischen Polarkoordinaten mit der Zuordnung $q^1 = r$, $q^2 = \vartheta$, $q^3 = \varphi$. Die kinetische Energie eines freien Teilchens ist

$$L = T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \quad (1.5)$$

mit

$$g_{\alpha\beta} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = m^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \vartheta \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Aus (1.5) folgen nach einfacher Rechnung die Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta &= 0, \\ \ddot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\vartheta} - \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cot \vartheta &. \end{aligned} \quad (1.7)$$

²Als Transformationen lassen wir vorläufig nur orthogonale Transformationen zu; später werden es Lorentz-Transformationen sein, und in der ART sind beliebige Transformationen zugelassen.

Wir sehen hier ein typisches Bild: außer den zweiten Ableitungen der Koordinaten kommen noch quadratische Terme in den Geschwindigkeiten hinzu. Sie rühren von der Ortsabhängigkeit der kinetischen Energie bzw. der Metrik her.

Die kinetische Energie der freien Bewegung eines Teilchens ist aber nichts Anderes als $\frac{m}{2}v^2$, wobei $v = |ds/dt|$ der Betrag der Geschwindigkeit ist, ausgedrückt als Änderung der Bogenlänge pro Zeiteinheit entlang der Bahn. Das Hamiltonsche Prinzip für T kann also auch geschrieben werden als $\delta \int v^2 dt = 0$, wobei das Integral längs der Bahn bei gegebenen Anfangs- und Endpunkten zu nehmen ist. Es lässt sich zeigen, dass sich dieselbe Bahn ergibt, wenn man statt v^2 das v selbst als „Lagrange-Funktion“ nimmt, also $\delta \int v dt = \delta \int ds = 0$ fordert. Das aber bedeutet: minimale Weglänge. Deshalb ist die Bahn des freien Teilchens eine Geodäte der Bewegung. Umgekehrt kann man jetzt die Geodäten bestimmen, indem man die Euler-Lagrange-Gln. des freien Teilchens löst. Wir betrachten zuerst den allgemeinen Fall und dann noch einmal die sphärischen Polarkoordinaten.

Aus

$$L = \frac{m}{2}v^2 = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta \quad (1.8)$$

sollen allgemein die Euler-Lagrange-Gln. 2. Art gefunden werden. Zuerst sind die verallgemeinerten Impulse und Kräfte

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} = g_{\alpha\nu}\dot{x}^\alpha, \quad F_\nu = \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta|\nu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta. \quad (1.9)$$

Dabei haben wir die Notation

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\dots) = (\dots)_{|\nu} \quad (1.10)$$

benutzt, also eine Abkürzung für die Ableitung nach kontravarianten Vektorkomponenten. Nun ist in den Euler-Lagrange-Gleichungen $\dot{p}_\nu = F_\nu$ der Impuls noch nach der Zeit zu differenzieren; dabei müssen Produkt- und Kettenregel anwenden:

$$g_{\alpha\nu}\ddot{x}^\alpha + g_{\alpha\nu|\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta|\nu}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta, \quad (1.11)$$

und bei dem zweiten Term können wir noch durch Änderung der Summationsindizes ausnutzen

$$g_{\alpha\nu|\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = \frac{1}{2}(g_{\alpha\nu|\beta} + g_{\beta\nu|\alpha})\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta. \quad (1.12)$$

Multiplizieren wir dann (1.11) mit $g^{\mu\nu}$, so folgt

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0, \quad (1.13)$$

wobei die Abkürzung

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu|\beta} + g_{\beta\nu|\alpha} - g_{\alpha\beta|\nu}) \quad (1.14)$$

benutzt wurde. Die $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ sind erste Ableitungen der Metrik und heißen Christoffel-Symbole. Sie sehen aus wie gemischte Tensoren, aber sie transformieren sich nicht so; deshalb sollte man sie nur als Rechengrößen ansehen, die allerdings in der Differentialgeometrie eine große Rolle spielen. Eine ihrer allgemeinen Eigenschaften folgt direkt aus der Definition:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}. \quad (1.15)$$

Man kann sie direkt aus den $g_{\alpha\beta}$ berechnen, in der Praxis ist es aber einfacher, zuerst die Euler-Lagrange-Gleichungen aufzustellen und dann die Christoffel-Symbole abzulesen. Im Beispiel der Kugelkoordinaten im dreidimensionalen Raum finden wir durch Vergleich mit (1.7) sofort

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -r, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \vartheta \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \vartheta; \end{aligned} \quad (1.16)$$

die anderen Christoffels sind Null.

Ein anderes wichtiges Beispiel ist die Bewegung auf einer Kugel von Radius a . Die Bewegung eines Punktes auf einer Kugel (sphärisches „Pendel“ ohne Schwerkraft) folgt Geodäten, die sich aus der Metrik

$$ds^2 = a^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (1.17)$$

ergeben, wobei die Indizes nur 1 oder 2 sein können. Die einzigen nicht verschwindenden Christoffels sind

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin \vartheta \cos \vartheta, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cot \vartheta. \quad (1.18)$$

Ohne das Folgende nun zu begründen, gebe ich einige Formeln an, mit denen man schließlich die Krümmung des Konfigurationsraums an jedem seiner Punkte berechnen kann. Als Krümmung wird dabei der einzige Skalar verstanden, der sich aus den zweiten Ableitungen der Metrik bilden lässt. Im Falle zweidimensionaler Flächen ist es anschaulich die Gauß-Krümmung, d. h. das Produkt der maximalen und der minimalen Krümmung, wenn man die Richtungen von Kurven durch den Punkt variiert. Bei Mannigfaltigkeiten

höherer Dimension versagt die Intuition, aber die Krümmung ist dennoch klar definiert. Den Schlüssel dazu liefert der Riemannsche Krümmungstensor, der zunächst noch eine Nummer „schlimmer“ aussieht als die Christoffel-Symbole (immerhin ist er ein Tensor, wenn auch vierter Stufe):

$$R^r{}_{msq} = \Gamma^r{}_{mq|s} - \Gamma^r{}_{ms|q} + \Gamma^r{}_{ns}\Gamma^n{}_{mq} - \Gamma^r{}_{nq}\Gamma^n{}_{ms}. \quad (1.19)$$

Dieser Tensor hat eine Reihe von Symmetrie-Eigenschaften, die dazu führen, dass es in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten nur $n^2(n^2 - 1)/12$ unabhängige Komponenten gibt: bei $n = 2$ lediglich eine, bei $n = 3$ immerhin schon 6 und bei $n = 4$ sind es 20. Aus dem Riemann-Tensor erhält man durch „Verjüngung“ mit $r = s$ den Ricci-Tensor 2. Stufe,

$$R_{mq} = R^r{}_{mrq} = -R^r{}_{mqr}. \quad (1.20)$$

Aus diesem kovarianten Tensor erhält man durch „Hochziehen“ eines Index einen gemischten,

$$R_q^n = g^{nm}R_{mq}, \quad (1.21)$$

und weitere Verjüngung (Spurbildung) ergibt den Krümmungsskalar

$$R = R^n{}_n. \quad (1.22)$$

Es lohnt sich, mit Hilfe dieser Formeln die folgenden Ergebnisse herzuleiten:

1. Der euklidische Raum beliebiger Dimension hat keine Krümmung, unabhängig davon, welche Koordinaten man benutzt.
2. Die Oberfläche eines Zylinders oder eines Kegels hat ebenfalls keine innere Krümmung.
3. Die Oberfläche einer Kugel von Radius a hat die Krümmung $R = 2/a^2$.
4. Ein dreidimensionaler Raum mit Koordinaten $(x^1, x^2, x^3) = (r, \vartheta, \varphi)$ und der Metrik

$$ds^2 = \frac{1}{1 - Kr^2}dr^2 + r^2d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2.$$

besitzt überall die gleiche Krümmung $6K$.

1.2 Phasenraumstruktur

Die Hamilton-Physik „lebt“ im (\mathbf{q}, \mathbf{p}) -Raum der Koordinaten und Impulse. Dabei sind die Impulse definiert mit Hilfe der Lagrange-Funktion gemäß

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \quad (1.23)$$

In der Hamilton-Mechanik ersetzen sie die $\dot{\mathbf{q}}$ als unabhängige Variablen, d. h. man muss die obige Relation nach $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ auflösen. Das ist in der Regel kein Problem, weil die Geschwindigkeiten in der Lagrange-Funktion als quadratische Form auftreten, nämlich in der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}t_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j$, mit einer positiv definiten symmetrischen Matrix t_{ij} , die sich invertieren lässt:³

$$p_i = t_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_j \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = t_{ij}^{-1}(\mathbf{q})p_j. \quad (1.24)$$

1.2.1 Die kanonischen Bewegungsgleichungen

Außer dem Wechsel des Phasenraums (mathematisch sagt man: vom Tangentialbündel des Konfigurationsraums zu seinem *Kotangentialbündel*, an jedem Punkt \mathbf{q} „hängt“ jetzt statt des Raums der Geschwindigkeiten der Raum der Impulse \mathbf{p}) erfordert der Übergang von der Lagrange-Mechanik zur Hamilton-Mechanik noch den Übergang von der Lagrange-Funktion $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ zur Hamilton-Funktion $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, die wie folgt definiert ist:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L, \quad (1.25)$$

wobei $\dot{\mathbf{q}}$ als $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ aufzufassen ist. Alles zusammen genommen, nennt man diesen Übergang eine *Legendre-Transformation*.

Man überzeugt sich rasch oder findet in jedem Mechanikbuch, dass die Bewegungsgleichungen jetzt die folgende *kanonische Struktur* haben:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.26)$$

Man kann dies noch etwas prägnanter formulieren, wenn man das $2f$ -Tupel $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ einführt und mit $\nabla_{\mathbf{x}} = \partial/\partial \mathbf{x} = (\partial/\partial \mathbf{q}, \partial/\partial \mathbf{p})$ den entsprechenden Gradienten. Dann gilt

$$\dot{\mathbf{x}} = M \nabla_{\mathbf{x}} H = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} H, \quad (1.27)$$

³Im Sinne der Unterscheidung von kontra- und kovarianten Vektoren müssten wir Gl. (1.24) schreiben $p_i = t_{ij}\dot{q}^j$, denn die Impulse sind kovariante Vektoren. Es wird dies aber im Folgenden nirgends eine Rolle spielen, so dass wir zur alten Notation zurückkehren, in der wir nur untere Indizes benutzen.

wobei $\mathbf{1}$ die $(f \times f)$ -Einheitsmatrix ist. Die $(2f \times 2f)$ -Matrix \mathbf{M} heißt *symplektische Matrix*. Sie wird als das wesentliche Strukturelement des Hamiltonschen Phasenraums angesehen und ist das zentrale Element der sog. *symplektischen Geometrie*.

Mit Hilfe der Matrix \mathbf{M} kann man im Raum der Gradienten von Funktionen über dem Phasenraum ein skalares Produkt einführen, das etwas ungewohnte Eigenschaften hat; es begründet die *symplektische Geometrie* dieses Raums. Seien $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ und $G(\mathbf{x}) = G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ zwei beliebige Phasenraum-Funktionen und $\nabla_{\mathbf{x}}F$ bzw. $\nabla_{\mathbf{x}}G$ ihre Gradienten. Dann nennt man

$$\{F, G\} = \nabla_{\mathbf{x}}F \cdot \mathbf{M} \nabla_{\mathbf{x}}G = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} \quad (1.28)$$

das symplektische Produkt der beiden Gradienten-Vektoren oder auch die *Poisson-Klammer* der Funktionen F und G . Diese Struktur hat eine sehr enge Entsprechung in der Quantenmechanik, die man dort den *Kommutator* nennt. Den Übergang von der klassischen zur quantenmechanischen Beschreibung eines Systems kann man dadurch vollziehen, dass man seine Poisson-Klammern durch Kommutatoren ersetzt. Da die Funktionen F, G in der Quantenmechanik zu *Operatoren* werden und diese sich als Matrizen darstellen lassen, ist der Kommutator zweier solcher Operatoren nichts als das, was wir bei Matrizen schon als Kommutator kennen, $[\mathbf{F}, \mathbf{G}] = \mathbf{FG} - \mathbf{GF}$. Daraus erklärt sich der auch für Poisson-Klammern übliche Sprachgebrauch, man „vertausche F mit G “.

Zwei Eigenschaften der Poisson-Klammer sieht man unmittelbar:

$$\{F, G\} = -\{G, F\} \quad \text{und} \quad \{F, F\} = 0. \quad (1.29)$$

Letzteres bedeutet, dass der Vektor $\nabla_{\mathbf{x}}F$ im Sinne des symplektischen Skalarprodukts senkrecht auf sich selbst steht. Wenn für zwei Funktionen F und G gilt $\{F, G\} = 0$, dann sagt man, die beiden Funktionen seien *in Involution* oder auch „sie vertauschen“.

Eine dritte wichtige Eigenschaft der Poisson-Klammer folgt aus der Produktregel der Differentiation:

$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G. \quad (1.30)$$

Dass wir das G im zweiten Term auf der rechten Seite nach rechts schreiben, ist nicht notwendig, da ja das Produkt von Funktionen kommutativ ist. Dennoch sollte man sich die Formel in dieser Form merken, weil sie dann auch

nach Übertragung in die Kommutatoren der Quantenmechanik gilt.

Als elementare Funktionen über dem Phasenraum kann man die Koordinaten x_i bzw. q_i oder p_i ansehen. Es gilt für die elementaren Poisson-Klammern

$$\{x_i, x_j\} = M_{ij} \quad \text{oder} \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad (1.31)$$

wobei M_{ij} die Elemente der symplektischen Matrix sind und i, j bei \mathbf{x} von 1 bis $2f$ laufen, bei \mathbf{q} und \mathbf{p} von 1 bis f .

Mit Hilfe der Poisson-Klammern lässt sich die zeitliche Entwicklung beliebiger Phasenraum-Funktionen elegant ausdrücken. Aus (1.27) entnimmt man mit $dF/dt = \nabla_{\mathbf{x}}F \cdot \dot{\mathbf{x}}$

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}. \quad (1.32)$$

Die zeitliche Änderung einer Funktion ist also durch deren Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion gegeben. Man sagt in diesem Sinne, die Hamilton-Funktion *erzeuge die zeitliche Entwicklung* im Phasenraum.

Insofern die x_i die elementaren Funktionen darstellen, sagt man auch, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\nabla_{\mathbf{x}}H$ sei *der von H erzeugte Fluss*.

Aus (1.32) sehen wir, dass Erhaltungsgrößen gerade diejenigen Funktionen über dem Phasenraum sind, die „mit H vertauschen“, für die also $\{F, H\} = 0$ gilt.

Der Hauptgrund für die Einführung des Hamiltonschen Phasenraums ist die damit verbundene größere Flexibilität bei der Wahl von Transformationen, die die Bewegungsgleichungen vereinfachen. Bei Lagrange sind lediglich Punkttransformationen $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}'$ möglich, aus denen sich dann die Transformation der Geschwindigkeiten ergibt. Bei Hamilton kann man als neue Variablen beliebige Funktionen der alten Koordinaten und Impulse einführen. Falls dabei die symplektische Matrix dieselbe bleibt, spricht man von kanonischen Transformationen (wofür es genau so viele Freiheiten gibt, wie man Freiheitsgrade hat). Es ist aber manchmal hilfreich, von dieser Forderung abzugehen (z. B. in der Dynamik starrer Körper, wenn man von der kanonischen Beschreibung mit Euler-Winkeln zu den Euler-Poisson-Gleichungen übergehen will; statt der Matrix \mathbf{M} hat man dann eine allgemeinere antisymmetrische sog. Poisson-Matrix).

1.2.2 Flüsse und Vektorfelder

Es wurde gesagt, dass die Hamilton-Funktion $H(q, p)$ über (1.32) den zeitlichen Fluss im Phasenraum erzeugt. Wenn wir als F speziell die Koordinaten des Phasenraums betrachten, dann folgt die Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\nabla_{\mathbf{x}}H. \quad (1.33)$$

Die rechte Seite ist ein Vektorfeld, das mit H gegeben ist, und diesem Vektorfeld folgt die Zeitentwicklung. Als Fluss im mathematischen Sinn wird die Abbildung

$$g_t : \mathbf{x}(0) \mapsto \mathbf{x}(t) \quad (1.34)$$

bezeichnet; in einem infinitesimalen Zeitintervall dt führt die Zeitentwicklung von $\mathbf{x}(0)$ nach $\mathbf{x}(0) + \mathbf{M}\nabla_{\mathbf{x}}H dt$. Diese Interpretation überträgt sich von H auf beliebige andere Funktionen über dem Phasenraum. Zum Beispiel nennt man $\mathbf{x}' = \mathbf{M}\nabla_{\mathbf{x}}p_i$ den von p_i erzeugten Fluss: das Vektorfeld ist $q'_i = 1$ und für alle anderen x_j gilt $x'_j = 0$. Der „von p_i erzeugte Fluss“ ist also eine Translation in i -Richtung. Ist der von q_i erzeugte Fluss $p'_i = -1$ mit ansonsten $x'_j = 0$. Für den Fluss, den die Drehimpulskomponente $L_z = xp_y - yp_x = p_\varphi$ (Letzteres findet man nach Einführen der Polarkoordinaten) bzgl. der z -Achse erzeugt, gilt $\varphi' = 1$ und Null für alle anderen Koordinatenänderungen.

Zwischen Funktionen über dem Phasenraum und Vektorfeldern besteht also offenbar ein enger Zusammenhang. Ausführlich kann man sich darüber in dem Buch von V. I. Arnold informieren. Die Poisson-Klammer entspricht dabei dem Kommutator von Vektorfeldern, den ich hier nicht einführen möchte (dafür benötigte man die sog. Lie-Ableitung). Sei nur soviel gesagt: seien zwei Vektorfelder \mathbf{A} und \mathbf{B} gegeben, dazu infinitesimale Parameter ds und dt , wobei $\mathbf{A}ds$ und $\mathbf{B}dt$ die entsprechenden Flüsse sind. Dann kann man als

$$\mathbf{A}ds\mathbf{B}dt - \mathbf{B}dt\mathbf{A}ds \quad (1.35)$$

den Kommutator der Flüsse ansehen: erst dt entlang \mathbf{B} , dann ds entlang \mathbf{A} , und dann das Umgekehrte abziehen. Dabei muss nicht Null herauskommen, sondern i. A. ein Resultat $\propto dsdt$. Beispiel: das von p_x erzeugte Feld im Phasenraum (x, y, p_x, p_y) ist $\mathbf{A} = (1, 0, 0, 0)^t$; die Funktion xp_y erzeugt $\mathbf{B} = (0, x, -p_y, 0)^t$. Das gibt

$$\mathbf{A}ds\mathbf{B}dt - \mathbf{B}dt\mathbf{A}ds = \begin{pmatrix} ds \\ xdt \\ -p_ydt \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ds \\ (x + ds)dt \\ -p_ydt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -dsdt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Das ist zugleich $\mathbf{C}dsdt$, wobei \mathbf{C} das Vektorfeld ist, welches vom Kommutator $\{p_x, xp_y\} = -p_y$ erzeugt wird, $\mathbf{C} = (0, -1, 0, 0)^t$. In diesem Sinne bedeutet das Nichtvertauschen zweier Phasenraum-Funktionen, dass es beim Hintereinanderausführen ihrer Flüsse auf die Reihenfolge ankommt.

Wenn allerdings der Kommutator eine Konstante ist, wie etwa bei $\{x, p_x\} = 1$, dann vertauschen die Flüsse, denn eine Konstante erzeugt ein verschwindendes Vektorfeld. Insofern ist die Beziehung zwischen der Menge der Phasenraumfunktionen und der Menge der Vektorfelder ein Homomorphismus, dessen Kern die eindimensionale Menge der konstanten Funktionen ist.

Ein interessanter Fall sind die Drehimpulskomponenten $L_x = yp_z - zp_y$, $L_y = zp_x - xp_z$, $L_z = xp_y - yp_x$, deren zugeordnete Vektorfelder die folgenden sind:

$$\mathbf{L}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \\ 0 \\ -p_z \\ p_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_y = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \\ p_z \\ 0 \\ -p_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_z = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \\ -p_y \\ p_x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Der Kommutator der Funktionen $\{L_x, L_y\} = L_z$ entspricht dem Kommutator der Vektorfelder $\{\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y\} = \mathbf{L}_z$, wie man durch Nachrechnen bestätigt.

1.2.3 Integrierte und „chaotische“ Bewegung

Besonders wichtige neue Impulse sind im Falle gebundener Bewegungen (das sind solche, die nicht ins Unendliche entweichen können, weder in Koordinaten noch in Impulsen) die sogenannten *Wirkungen*. Wir betrachten zunächst bei einem einzigen Freiheitsgrad eine beliebige periodische Bewegung $(q(t), p(t))$ mit Periode $T = 2\pi/\omega$, also $(q(t+T), p(t+T)) = (q(t), p(t))$. Als „Wirkung“ dieser Bahn bezeichnet man das geschlossene Integral

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq = \frac{1}{2\pi} \int_0^T p(t)\dot{q}(t)dt. \quad (1.38)$$

Es handelt sich dabei um die von der Linie $H = \text{const} =: E$ im Phasenportrait eingeschlossene Fläche; sie hängt im Allgemeinen natürlich von E ab: $I = I(E)$. Die Umkehrung dieses Zusammenhangs, $E = E(I)$, ist als Hamilton-Funktion interpretierbar, wenn man I als kanonischen Impuls auffassen kann. Dazu muss aber erst eine kanonische Transformation $(q, p) \mapsto$

(θ, I) konstruiert werden, bei der I als Impuls vorausgesetzt und θ als zugehörige Koordinate zu bestimmen ist. Wenn das geschehen ist, haben wir als kanonische Bewegungsgleichungen

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \text{const} =: \Omega. \quad (1.39)$$

Der „Impuls“ I ist also konstant (nach Konstruktion so zu erwarten) und die „Koordinate“ θ wächst in der Zeit linear an. Einfacher kann eine Bewegung nicht sein.

Wie aber findet man θ ? Das geht mit Hilfe der erzeugenden Funktion $F_2(q, I)$ einer kanonischen Transformation, für die gilt $p = \partial F_2 / \partial q$ und $\theta = \partial F_2 / \partial I$. Die erste dieser Relationen nutzen wir zur Definition von F_2 :

$$F_2(q, I) = \int^q p(q, H(I)) dq, \quad (1.40)$$

wobei wir p als Funktion von q und H aus der ursprünglichen Hamiltonfunktion $H(q, p)$ haben und $H(I)$ aus der Umkehrung von $I(H)$. Wenn aber nun F_2 bekannt ist, gewinnen wir θ mit

$$\theta = \frac{\partial F_2}{\partial I} = \int^q \frac{\partial p}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial I} dq = \Omega \int^q \frac{\partial p}{\partial H} dq = \theta(q, I). \quad (1.41)$$

Die Beschreibung der Bewegung im (θ, I) -Phasenraum heißt *Wirkungs-Winkel-Darstellung*. Dass es sich bei θ um einen Winkel handelt, erkennen wir, wenn wir seine Änderung über eine Periode berechnen:

$$\begin{aligned} \Omega T &= \oint \dot{\theta} dt = \oint d\theta = \oint \frac{\partial \theta}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial^2 F_2}{\partial q \partial I} dq \\ &= \frac{\partial}{\partial I} \oint \frac{\partial F_2}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial I} \oint p dq = 2\pi \frac{\partial I}{\partial I} = 2\pi. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Daraus entnehmen wir, dass $\Omega = \omega$ die Frequenz der ursprünglichen Bewegung ist und θ ein Winkel, der längs der Phasenraumbahn $H = E$ gleichmäßig um 2π wächst. Nimmt man (θ, I) als Polarkoordinaten, so läuft die Bewegung auf dem Kreis $I = \text{const}$ mit konstanter Geschwindigkeit ω . Bahnen zu verschiedenen E geben konzentrische Kreise.

Dieses Bild gilt für alle periodischen Bewegungen mit einem Freiheitsgrad. Der Unterschied der Systeme liegt einerseits in der Abhängigkeit $H(I)$ bzw. $\omega(E)$, andererseits in der Transformation auf die Winkelkoordinate, die den

Zeitverlauf gleichförmig macht. Wir können den Phasenraum verstehen als eine 1D-Menge von Wirkungen I , an der für jedes I ein θ -Kreis angeheftet ist. Die Bewegung auf diesen Kreisen ist gleichförmig mit Geschwindigkeit $\Omega(I)$. Bei einigen „kritischen“ Werten mag dieses Bild nicht zutreffen, weil die invarianten Kreise eine „Bifurkation“ durchmachen (ihren topologischen Charakter ändern), z.B. verschwinden oder sich einschnüren. An solchen Stellen ist die Definition der Wirkung eventuell nicht stetig möglich.

Aber wie verhält sich ein System mit mehr als einem Freiheitsgrad? Es kann sein, dass es bei geeigneter Wahl von Koordinaten in Systeme mit je einem Freiheitsgrad „zerfällt“ bzw. „separiert“. Dann ist – bei f Freiheitsgraden – der Phasenraum darstellbar als eine Blätterung von f -dimensionale Mengen $H(I_1, \dots, I_f) = \text{const}$ (den sog. Energieflächen in Wirkungsdarstellung), wobei an jedes $\mathbf{I} = (I_1, \dots, I_f)$ ein f -Torus aus Winkeln $(\theta_1, \dots, \theta_f)$ angeheftet ist, auf dem die Bewegung mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\theta}_i = \Omega_i = \partial H / \partial I_i$ verläuft. Ob dies so gilt, wird durch den Satz von Liouville und Arnold bestimmt. Man nennt das System dann *integrabel*. Dazu ist erforderlich, dass es f unabhängige und kommutierende Erhaltungsgrößen $C_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ gibt, $i = 1, \dots, f$. Das bedeutet dreierlei (bitte merken!):

1. Die C_i sind Erhaltungsgrößen, also gilt $\{C_i, H\} = 0$.
2. Die C_i sind untereinander in Involution, also $\{C_i, C_j\} = 0$ für alle i, j .
3. Die C_i sind unabhängig in dem Sinne, dass ihre Gradienten $\partial C_i / \partial \mathbf{x}$ im Phasenraum linear unabhängig sind.

Die zweite Bedingung ist gewöhnungsbedürftig und nicht ohne weiteres einsichtig. Sie verhindert, dass man zwei Komponenten des Drehimpulses als Erhaltungsgrößen benutzen kann, auch wenn beide konstant sind. Denn es gilt bekanntlich $\{L_x, L_y\} = L_z$. Die Bedeutung dieser Bedingung ist, dass die von den C_i im Sinne der Poisson-Klammern erzeugten Flüsse kommutieren, d. h. es ist egal, ob man z. B. erst dreht und dann zeitlich entwickelt oder umgekehrt (infinitesimal gemeint). Die dritte Bedingung ist unmittelbar plausibel, denn man wird nicht z. B. die Energie E und ihr Quadrat E^2 als physikalisch unabhängige Erhaltungsgrößen akzeptieren wollen.

Wenn die drei Bedingungen erfüllt sind, dann greift der Satz von Liouville und Arnold, dessen Name etwas wundersam ist, denn Joseph Liouville lebte 1809-1882, während Vladimir I. Arnold erst 1937 geboren wurde und noch heute lebt. Es ist wohl so, dass Liouville den Sachverhalt kannte, der in diesem Satz behauptet wird, während erst Arnold ihn streng bewies. Der Satz besagt,

dass die Bewegung auf f -dimensionale Tori im Phasenraum beschränkt ist und dass man kanonische Wirkungs-Winkel-Variablen $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I})$ einführen kann. Die Wirkungen \mathbf{I} charakterisieren dabei die Tori, und die Winkel θ_i laufen auf den f Kreisen, die jeweils einen Torus bilden, gleichmäßig um. Die Hamilton-Funktion nimmt in dieser Darstellung die einfache Form $H = H(\mathbf{I})$ an, so dass alle \mathbf{I} Konstanten der Bewegung sind und die Winkelgeschwindigkeiten ebenfalls, $\dot{\theta}_i = \partial H / \partial I_i = \text{const.}$ Die Wirkungen erhält man durch Integration längs geschlossener Wege $\gamma_1, \dots, \gamma_i$ auf den Tori,

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}. \quad (1.43)$$

Es gibt immer f unabhängige solcher Wege; bis auf ganzzahlige Linearkombinationen sind sie auch eindeutig bestimmt.

Die Darstellung der Hamilton-Funktion in Wirkungs-Winkel-Variablen ist das hohe Ziel der klassischen Mechanik, wenn denn das System integrabel ist. Zu Jacobis und Liouvilles Zeiten glaubte man noch daran, eines Tages alle mechanischen Systeme integrieren zu können. Durch Poincaré wissen wir, dass das eine Illusion war: fast alle Systeme (im mathematischen Sinne: mit Ausnahme einer Menge vom Maß Null) sind nicht-integrabel. Dann sind die invarianten Mengen eben nicht mehr f -Tori, sondern höherdimensionale Gebilde im Phasenraum, und das bedeutet, dass die Vorhersagbarkeit der Zukunft eines Anfangspunktes eingeschränkt ist: je weniger Erhaltungsgrößen, desto unsicherer die Vorhersage. Man spricht von „Chaos“. Zu seinem Studium hat Poincaré Verfahren vorgeschlagen, die mit heutiger Computertechnik weitgehend ausgeschlachtet wurden, was Systeme mit zwei Freiheitsgraden anbetrifft. Bei solchen mit drei und mehr Freiheitsgraden – z. B. schon bei einem Kreisel in cardanischer Aufhängung, deren Achse nicht senkrecht steht – warten wir immer noch auf gute Ideen, wie man dort weiterkommen könnte.

Die „alte Quantenmechanik“ von Bohr und Anderen wollte die mikroskopische Welt dadurch beschreiben, dass man die klassischen Wirkungen I diskretisierte: nur Vielfache des Planckschen Wirkungsquantums \hbar zuließ. Einstein bemerkte 1917 in einem tiefsinnigen Artikel, dass das nur für integrable Systeme gutgehen konnte. Von da an war die Physik in einer tiefen Krise, die erst 1925/26 durch Schrödinger und Heisenberg überwunden wurde. Aber auch in deren „neuer Quantenmechanik“ spielen die Wirkungen eine wichtige Rolle. In jüngerer Zeit benutzt man wieder sehr erfolgreich die sog. *semiklassische Quantenmechanik*, der auch nicht-integrable, chaotische Bewegungen zugänglich geworden sind. Namen, die man sich in diesem Zusammenhang merken sollte, sind Michael Berry (Bristol) und Martin Gutzwiller (New York).

2 Hydrodynamik

Die Hydrodynamik hat sich parallel zur Mechanik entwickelt, mit teilweise den gleichen Protagonisten: Euler, Lagrange, Hagen, Poiseuille, Stokes, Rayleigh, Kelvin, Prandtl, Kolmogorov, ...

Es kann hier nur um einige Grundlagen gehen. Als Literatur dazu verweise ich auf die Bücher von Tritton und Landau-Lifshitz. Wir werden nur einkomponentige Fluide (Gase, Flüssigkeiten) betrachten, wobei lokales Gleichgewicht (GG) angenommen wird. D. h. es wird angenommen, dass es elementare Volumina $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ gibt, deren Abmessungen groß sind gegenüber der freien Weglänge der Atome oder Moleküle, so dass GG sich einstellen kann, aber klein gegenüber den typischen Längen der betrachteten Systeme. Der dynamische Zustand eines solchen Systems hat dann 5 unabhängige Felder:

1. ein dreikomponentiges Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (u, v, w)$
2. zwei skalare Felder, die die Thermodynamik des lokalen GG charakterisieren; das sind in der Regel die Dichte $\rho(\mathbf{r}, t)$ und eine Größe wie Temperatur, Entropie- oder Energiedichte. Die anderen thermodynamischen Größen sind dann durch die jeweils relevanten Zustandsgleichungen bestimmt.

Zu den Dichten ist zu sagen, dass sie in diesem Kontext meist auf die Masse bezogen werden, also z. B. $v = V/M$ (Volumen), $s = S/M$ (Entropie), $\epsilon = U/M$ (innere Energie), $w = \epsilon + pv$ (Enthalpie), $\Phi = \epsilon - Ts + pv$ (freie Enthalpie). Dabei ist $M = mN$ mit Teilchenzahl N . Manchmal werden aber auch auf das Volumen bezogene Dichten betrachtet, z. B. die Massendichte $\rho = M/V = 1/v$, die Entropiedichte ρs oder die Dichte der inneren Energie $\rho \epsilon$.

Zu Beginn wurden aus dem Buch von Tritton einige einleitende Beispiele vorgestellt, wobei inkompressible Newtonsche Fluide betrachtet wurden: laminarer Fluss zwischen zwei parallelen Platten, Poiseuille-Fluss durch ein Rohr. Es wurde für solche Situationen die dimensionslose Reynoldszahl eingeführt,

$$\text{Re} = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{u L}{\nu}, \quad (2.1)$$

wobei u eine typische Geschwindigkeit und L eine typische Länge des Systems ist, μ die Viskosität und $\nu = \mu/\rho$ die sog. *kinematische Zähigkeit*. Es wurde kurz angedeutet, wie bei wachsendem Re der Übergang von laminarer

zu turbulenter Strömung stattfindet.

Nicht mehr diskutiert wurden Strömungen (Konvektion) aufgrund von thermischem Antrieb (Bénard-Problem). Es sei aber hier angefügt, dass auch dort eine dimensionslose Zahl den Übergang von stationärem zu turbulentem Verhalten regiert, die Rayleighzahl

$$\text{Ra} = \frac{gd^3\alpha\Delta T}{\nu\kappa}; \quad (2.2)$$

dabei ist d eine typische Abmessung des Systems (Dicke der Schicht), α der thermische Ausdehnungskoeffizient, ΔT eine typische Temperaturdifferenz, $\nu = \mu/\rho$ die kinematische Viskosität und $\kappa = \lambda/\rho c_p$ die thermische Diffusivität, λ die Wärmeleitfähigkeit und c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck.

2.1 Ideale Fluide

Als ideal bezeichnet man Fluide ohne Dissipation, d. h. die Viskosität ist $\mu = 0$. Das ist zwar unrealistisch, aber manche Strömungseigenschaften lassen sich so schon verstehen. Die Theorie wurde 1755 von Euler begründet; den statischen Teil dazu kannte schon Bernoulli. Nachzulesen ist das alles bei Landau-Lifshitz, deshalb hier nur das Wichtigste in Stichworten.

2.1.1 Grundgleichungen

Die fünf Grundgleichungen sind

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) s = 0 \quad (2.5)$$

Die erste ist die Erhaltung der Masse: sie kann sich an einem Ort nur durch Strömen ändern. Die zweite Gleichung heißt Euler-Gleichung und beschreibt die Änderung des Geschwindigkeitsfeldes aufgrund der wirkenden Kräfte ∇p (Druckkraft) und \mathbf{g} (Schwerkraft); sie ist nichts Anderes als das 2. Newtonsche Gesetz für jedes Volumenelement des Fluids. Die dritte Gleichung ist die Erhaltung der Entropie (pro Masse); sie charakterisiert die idealen Fluide als solche, bei denen keine Wärme produziert wird.

Wenn s auch noch räumlich konstant ist, spricht man von isentropen Strömungen. Dann kann man die thermodynamische Identität der Enthalpie benutzen, $dw = Tds + (1/\rho)dp = (1/\rho)dp$, um (2.4) zu schreiben als

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla(w + gz). \quad (2.6)$$

Indem man hier nun die Identität $\frac{1}{2}\nabla \mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ benutzt, erhält man

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + w + gz) = 0, \quad (2.7)$$

und wenn man von dieser Gleichung die Rotation nimmt, bleibt eine Gleichung alleine für das isentrope Strömungsfeld:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})) = 0. \quad (2.8)$$

Dazu kommen noch geeignete Randbedingungen: das Geschwindigkeitsfeld muss tangential zum Rand sein. Bei dem bis hier diskutierten Satz von Gleichungen für ρ , \mathbf{u} , s muss die Kompressibilität nicht unbedingt Null sein. Man kann also z. B. die Atmosphäre diskutieren, soweit die Viskosität keine Rolle spielt.

Wenn allerdings die Kompressibilität verschwindet, also $\rho = \text{const}$ ist, dann muss aufgrund der Massenerhaltung gelten

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.9)$$

Dies vereinfacht die Euler-Gleichung in der Weise, dass man schreiben kann

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \frac{p}{\rho} + \mathbf{g}, \quad (2.10)$$

und auch ohne Annahme von $s \equiv \text{const}$ gilt die Gleichung (2.8). Wenn die Strömung außerdem noch isentrop ist, dann braucht man wegen $\rho = \text{const}$ und $s = \text{const}$ nur die Gleichung (2.8) zusammen mit (2.9) zu lösen.

Besonders einfach ist die *Hydrostatik*. Dort interessiert man sich für stationäre Felder ohne Strömungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{u} = 0. \quad (2.11)$$

Die Euler-Gleichung reduziert sich dadurch auf

$$\nabla p = \rho \mathbf{g}. \quad (2.12)$$

Dabei ist noch die Thermodynamik zu berücksichtigen, die zwischen p und ρ einen Zusammenhang herstellt, der noch von der Temperatur oder von s abhängen kann. Dazu Einiges in den Übungen.

Der nächst einfache Spezialfall sind die stationären isentropen idealen Strömungen, bei denen zwar $\partial/\partial t = 0$ ist, nicht aber \mathbf{u} . Man hat dann die Gleichung

$$\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + w + gz \right) \quad (2.13)$$

und führt das Konzept der Stromlinien ein: das sind die Linien, die in jedem Punkt zum \mathbf{u} -Feld tangential sind:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (2.14)$$

Skalare Multiplikation der Gl. (2.13) mit dem Tangentenvektor an die Stromlinie in einem Punkt zeigt, dass längs der Stromlinien

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + w + gz = \text{const}, \quad (2.15)$$

wobei die Konstante allerdings von Stromlinie zu Stromlinie variieren kann. Die Gl. (2.15) heißt *Bernoulli-Gleichung*. Im Falle inkompressibler Strömungen vereinfacht sie sich wegen $d\epsilon = Tds - pd(1/\rho) = 0$ und daher $w = \epsilon + p/\rho = p/\rho + \text{const}$ zu

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}. \quad (2.16)$$

Statt der Gleichung für die Entropiedichte ist häufig die für die Energiedichte von Interesse. Man rechnet die eine in die andere um, indem man noch die beiden anderen Gln. zu Hilfe nimmt (s. Landau-Lifshitz). Das Resultat ist zunächst nicht ganz offensichtlich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho \epsilon \right) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + w \right) \right). \quad (2.17)$$

Dabei ist $\rho \epsilon$ die innere Energie pro Volumeneinheit; zusammen mit der Volumendichte der kinetischen Energie steht links die Änderung der gesamten Energiedichte an einem Ort. Sie wird bestimmt durch die Divergenz nicht der Energiestromdichte, sondern der Enthalpiestromdichte! Der Grund: nicht das Volumen eines Flüssigkeitselements wird kontrolliert, sondern der Druck, so dass auch die Druckkräfte Arbeit auf das strömende Fluid ausüben. Man sieht das an der integralen Form der Gleichung, nachdem man das Volumenintegral über die Divergenz in ein Oberflächenintegral umgewandelt hat:

$$\int \rho \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + w \right) d^3 \mathbf{r} = \oint \rho \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + \epsilon \right) \cdot d^2 \mathbf{r} + \oint p \mathbf{u} \cdot d^2 \mathbf{r} \quad (2.18)$$

(wegen $w = \epsilon + p/\rho$). Der Term ganz rechts beschreibt den Einfluss der Druckkräfte.

Analog kann man die Euler-Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld umschreiben in eine Gleichung, die als Erhaltung des Impulses zu interpretieren ist. Man schreibt sie am besten in Komponenten hin, weil sonst der Vektorcharakter nicht so leicht zu erkennen ist. Für die i -te Komponente der Impulsdichte ρu_i erhält man – wiederum durch Umrechnung der Gln. (2.3), (2.4) –

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad \Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho u_i u_k. \quad (2.19)$$

Bei festem i ist das wiederum als Kontinuitätsgleichung zu lesen: die Änderung der i -ten Komponente des Impulses ist die negative Divergenz eines Impulsstroms Π_{ik} . Dieser hat einen „skalaren“ Anteil, der vom Druck herrührt, und einen, der direkt mit dem Fluss des kinetischen Impulses verknüpft ist. Man nennt Π_{ik} den Impulstensor, weil er sich tatsächlich wie ein Tensor verhält. Anmerkung: die obige Betrachtung gilt für den Fall, dass die Gravitationskraft keine Rolle spielt. Berücksichtigt man den Term \mathbf{g} in der Euler-Gleichung, dann ist im Impulstensor der Druck p zu ergänzen um die Energiedichte des Gravitationsfelds, also $p \rightarrow p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$ (wobei Inkompressibilität $\rho = \text{const}$ angenommen ist.)

Zur Beschreibung der Strömungsfelder idealer Fluide werden weitere Konzepte eingeführt: Wirbelstärke, Potentialströmung, Grenzflächen, Stromfunktion.

2.1.2 Wirbelstärke, Potentialströmung

Bei isentropen Strömungen idealer Fluide folgert man mit Hilfe der Eulerschen Gleichung, dass die Zirkulation

$$\Gamma := \oint_{\gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_A (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d^2\mathbf{r}, \quad (2.20)$$

als Integral über einen geschlossenen Weg $\gamma = \partial A$, der ganz innerhalb des Fluids liegt und ein einfach zusammenhängendes Gebiet A umschließt, zeitlich konstant ist, sofern man mit d/dt wieder die substantielle Ableitung meint, also bei der Änderung die Bewegung des Weges mit der Strömung berücksichtigt. Zum Beweis siehe Landau-Lifshitz § 8. Insbesondere bedeutet dies (für infinitesimal kleine Flächen A), dass die lokale *Wirbelstärke* (vorticity) $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ längs der Strömung konstant ist. Wenn nun eine Strömung,

etwa an einem Hindernis vorbei, aus einem Bereich kommt, in dem zunächst $\mathbf{u} = \text{const}$ ist und daher $\boldsymbol{\omega} = 0$, dann sollte das überall so bleiben, auch noch hinter dem Hindernis. Man spricht dann von *Potentialströmung*, denn wenn $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ in einem einfach zusammenhängenden Gebiet, dann existiert ein skalares Feld $\phi(\mathbf{r})$, so dass $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ dessen Gradient ist:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \nabla\phi(\mathbf{r}). \quad (2.21)$$

Bei Strömungen, die an einem Hindernis vorbeiziehen (z. B. einer Kugel), gibt es hiermit allerdings ein subtiles Problem. In der Menge der möglichen Lösungen der Euler-Gleichungen (mit Randbedingung: \mathbf{u} muss tangential zur Oberfläche sein) sind solche, die ein Stück weit an der Oberfläche des Hindernisses entlang laufen und sich dann mit stetiger Tangente *ablösen*. Der Punkt, an dem die Ablösung stattfindet, ist weitgehend willkürlich, so dass es unendlich viele dieser Lösungen gibt. Sie schließen hinter dem Hindernis einen Bereich ein, in dem das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} verschwindet. An der Grenze gibt es dann einen Sprung, was effektiv eine nicht verschwindende Zirkulation bedeutet für einen Weg, dessen Mittelpunkt auf der Grenze liegt. Das steht nicht in Widerspruch zum oben Gesagten, weil für Punkte auf der Oberfläche des Hindernisses die Zirkulation gar nicht definiert ist, denn man kann keine geschlossenen Wege um sie herum legen. Physikalisch spielen die Lösungen, bei denen es einen derart strömungsfreien Schatten hinter dem Hindernis gibt, kaum eine Rolle, denn bei endlicher Viskosität μ kommt so etwas nicht vor. Da gibt es an der Oberfläche des Hindernisses die strikte Randbedingung $\mathbf{u} = 0$ (no slip), und damit ist die Lösung eindeutig bestimmt. Sie hat allerdings den Charakter, in einer Grenzschicht nahe der Oberfläche prinzipiell anders zu sein als weiter draußen und nach dem Ablösen der Grenzschicht vom Hindernis Wirbelstraßen auszubilden. Das Konzept der Grenzschichten wurde 1904 von L. Prandtl eingeführt, T. von Kármán klärte 1911 den Charakter der nach ihm benannten Wirbelstraßen. Ein lesenswerter Artikel dazu ist S. Großmann, B. Eckhardt, D. Lohse, *Hundert Jahre Grenzschichtphysik*, Physik-Journal Oktober 2004, 31 ff. Bei geeigneter Skalierung verschwindet die Grenzschicht auch im Limes $\mu \rightarrow 0$ nicht, und deshalb ist dieser Limes verschieden von der Physik der idealen Fluide, bei der von vornherein $\mu = 0$ angenommen wird. Die auch im Limes $\mu \rightarrow 0$ abgelöste unendlich dünne Grenzschicht verhindert, dass man im ganzen Gebiet um das Hindernis herum Potentialströmung annehmen kann; hinter dem Hindernis gibt es eine Schicht, die mathematisch als Verzweigungsschnitt zu beschreiben ist, also als Unstetigkeit, bei der gewisse Größen einen Sprung machen.

Dennoch ist es für viele Zwecke sinnvoll, den Fall der reinen Potentialströmung $\mu = 0$ zu betrachten – z. B. wenn ein Rohr verzweigt, das „Hindernis“ also

nicht nur lokal ist und das Gebiet der Strömung einfach zusammenhängend ist. Dann haben wir überall $\mathbf{u} = \nabla\phi$. Eingesetzt in die Euler-Gleichung (2.7) findet man

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^2 + w + gz = f(t) \quad (2.22)$$

mit einer beliebigen Funktion $f(t)$, die nicht vom Ort abhängt und deswegen als Eichfunktion von ϕ absorbiert werden kann. Man kann sie deswegen auch als Null annehmen (was dann eine bestimmte Eichung darstellt). Bei stationären Strömungen findet man dann wieder die Gleichung (2.15), die wir von der Bernoulli-Strömung kennen. Allerdings kann dort die Konstante von Stromlinie zu Stromlinie verschieden sein, während sie hier im ganzen Fluid dieselbe ist (und nur von der Wahl des Energie-Nullpunkts abhängt).

Wenn das Fluid noch inkompressibel ist, dann gilt außer $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ auch $\nabla \cdot \mathbf{u}$, so dass wir für ϕ die Laplace-Gleichung finden,

$$\Delta\phi = 0, \quad (2.23)$$

die dann für passende Randbedingungen zu lösen ist. Hier begegnet sich die Hydrodynamik mit der Elektrodynamik und anderen Bereichen der Physik. Zur Lösung (das Problem sind die Randbedingungen) gibt es die Methode der Greenschen Funktionen, aber in vielen Fällen (den meisten!) ist das Problem „chaotisch“.

Im Falle zweidimensionaler Strömungen unkompressibler Fluide gibt es einen schönen Trick, der auch in der E-Dynamik bekannt ist: die Methode der harmonischen Funktionen bzw. konformen Abbildungen (das ist dasselbe). Da nämlich

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (2.24)$$

gibt es eine *Stromfunktion* $\psi(x, y)$, so dass

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (2.25)$$

denn (2.24) ist dazu die Integrabilitätsbedingung. Entlang der Stromlinien gilt $u_x dy - u_y dx = 0$, woraus dann folgt

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = d\psi = 0, \quad (2.26)$$

d. h. die Stromfunktion ist längs der Stromlinien konstant. Andererseits ist das Potential $\phi(x, y)$ konstant auf Linien senkrecht dazu, denn $\mathbf{u} = \nabla\phi$.

Darum bilden die Linien $\phi = \text{const}$ und $\psi = \text{const}$ ein System orthogonaler Koordinatenlinien, und dies kennt man von den Linien konstanter Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen. Es liegt also nahe, das Problem folgendermaßen zu komplexifizieren:

$$z = x + iy, \quad w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y). \quad (2.27)$$

Denn es gelten die Cauchy-Riemann-Dgln

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = u_x, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = u_y. \quad (2.28)$$

Man hat daher zu jeder analytischen Funktion $w(z)$ ein Stromlinienfeld, wenn nur die Berandung des strömenden Fluids durch Linien $\text{Im}w = \psi = \text{const}$ gegeben und w auf der Berandung bis auf diese Konstante reell ist. Einfachstes Beispiel: $w(z) = cz$ und Berandung durch zwei Linien $y = a, y = b$. Dann ist $\phi = cx$ und das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u} = (c, 0)$. Ein interessanteres Beispiel (Strömung um einen Zylinder) wird in den Übungen diskutiert.

2.1.3 Kräfte bei Potentialströmung

Die Intuition sagt uns, dass die Strömung um einen Körper eine Kraft auf diesen ausübt bzw. dass man Kraft aufwenden muss, um einen Körper durch eine ruhende Strömung zu ziehen. Diese Kräfte werden auf zwei Weisen in Erscheinung treten: parallel zur Strömung spricht man von Widerstandskraft (drag force), senkrecht dazu von Auftrieb (Lift). Bei der Konstruktion von Flugzeugen versucht man, die Widerstandskraft so gering wie möglich und den Auftrieb so groß wie möglich zu machen. Untersuchen wir in diesem Abschnitt, was die Theorie der Potentialströmungen hierzu sagen kann. Ich folge dabei dem § 11 im Buch von Landau-Lifshitz.

Die Grundidee dabei ist folgende. Statt den Effekt einer Strömung auf einen ruhenden Körper zu betrachten, diskutiert LL einen Körper, der mit konstanter Geschwindigkeit \mathbf{v} durch ein ruhendes Fluid gezogen wird. Nach Newtons 3. Gesetz sollte das bis auf das Vorzeichen dieselben Kräfte geben. Es wird geschaut, welches Strömungsfeld \mathbf{u} der bewegte Körper in dem Fluid verursacht, und dann wird die darin enthaltene kinetische Energie berechnet. Mit dieser kinetischen Energie ist ein Impuls verbunden, und die zeitliche Änderung dieses Impulses ist dann die gesuchte Kraft. – Es darf nicht verwundern, dass diese Kraft sich als Null ergibt, denn die Strömung ist als frei von Dissipation angenommen. Genauso wie der Transport einer Masse entlang einer Horizontalen keine Kraft erfordert, wenn keine Reibung vorhanden ist. Das ist zwar unrealistisch im Hinblick auf unsere Erfahrung, es

ist aber im Rahmen der Newtonschen Physik unabweisbar. Widerstands- und Auftriebskräfte gibt es nur dann, wenn die Strömung mit Dissipation (Viskosität) verbunden ist, auch wenn diese beliebig klein sein mögen.

Betrachten wir das Strömungsfeld eines Körpers, der durch ein Fluid gezogen wird, zu einer festen Zeit. Sein Potential ϕ soll im Unendlichen verschwinden und lässt sich nach Ableitungen von $1/r$ entwickeln (Multipolentwicklung):

$$\phi = \frac{a}{r} + \mathbf{A} \cdot \nabla \frac{1}{r} + \dots \quad (2.29)$$

Zuerst mache man sich klar, dass der Monopolanteil verschwinden muss, $a = 0$, denn in Analogie zur Elektrodynamik würde er ein zentralsymmetrisches \mathbf{u} -Feld generieren, das einen konstanten Fluss nach außen oder innen bedeutet, wenn man Kugelflächen unterschiedlicher Radien um den Körper herum legt. Das ist aber nicht der Fall. Also ist der niedrigst mögliche Term in der Entwicklung ein Dipol-Term

$$\phi = \mathbf{A} \cdot \nabla \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u} = \nabla \phi = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} = \frac{3(\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{A}}{r^3}. \quad (2.30)$$

Dabei ist der Vektor \mathbf{A} ein Vektor, der von der Gestalt des Körpers abhängt. Man erhält ihn, indem man die Gleichung $\Delta \phi = 0$ für das Potential ϕ mit den gegebenen Randbedingungen löst, und da diese hier einen mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegten Körper beschreiben, wird man erwarten, dass \mathbf{A} linear mit diesem \mathbf{v} zusammenhängt. Fragt man aber zuerst nach der kinetischen Energie des Fluids

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \mathbf{u}^2 d^3 \mathbf{r}, \quad (2.31)$$

wobei das Integral über den ganzen Raum außerhalb des Körpers genommen wird, dann findet man nach einiger Rechnung

$$T = \frac{1}{2} \rho (4\pi \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - V_0 \mathbf{v}^2); \quad (2.32)$$

dabei ist V_0 das Volumen des Körpers. Benutzt man nun, dass \mathbf{A} linear in den Komponenten von \mathbf{v} ist, dann ist die kinetische Energie schließlich eine quadratische Form in den v_i mit konstanten Koeffizienten,

$$T = \frac{1}{2} m_{ik} v_i v_k. \quad (2.33)$$

m_{ik} ist ein konstanter „induzierter Massentensor“. Der Impuls des Fluids ergibt sich nach Lagrange aus $\mathbf{P} = \partial T / \partial \mathbf{v}$, also

$$\mathbf{P} = 4\pi \rho \mathbf{A} - \rho \mathbf{v} V_0. \quad (2.34)$$

Die Kraft, die der Körper auf das Fluid ausübt, wäre die Änderung dieses Impulse; umgekehrt übt die Strömung auf den Körper die Kraft $-\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t$ aus. Dies ist aber Null, denn der Impuls \mathbf{P} ist konstant. Eigentlich ist dies nicht sonderlich verwunderlich, denn ohne Reibung bewegt sich ein Körper auch durch ein Fluid mit konstanter Geschwindigkeit, wenn keine Kraft wirkt. Dennoch wird dieser Befund als *d'Alemberts Paradoxon* bezeichnet, denn es scheint der Erfahrung zu widersprechen, dass man Körper nicht ohne Widerstand durch Fluida ziehen kann. Im Zeitalter des Flugzeugs kennt man auch die Auftriebskräfte, die das Fliegen ermöglichen. Dazu ist aber offenbar mehr nötig als die Theorie der idealen Fluide.

2.2 Viskose Fluide: Navier-Stokes-Gleichungen

In realen Fluiden gibt es als dissipative Effekte immer auch Reibung, die von der Viskosität verursacht wird, und Wärmeleitung. Die Viskosität hat Einfluss auf die Impulsbilanz, die Wärmeleitung auf die Energiebilanz. Während die Erhaltung der Massendichte hiervon unberührt bleibt, müssen wir die Euler-Gleichung um Reibungsterme und die Energie-Gleichung um Wärmeleitung ergänzen. Erst danach haben wir die vollen Gleichungen der Hydrodynamik einkomponentiger Newtonscher Fluide. In diesem Abschnitt soll es allein um die Impulsbilanz gehen.⁴ Dabei werden wir auf die sehr wichtige Navier-Stokes-Gleichung stoßen.

Ausgangspunkt sei die Impulsbilanz in der Form (2.19) (einen \mathbf{g} -Term in Π_{ik}); wir schreiben

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho u_i u_k = -\sigma_{ik} + \rho u_i u_k \quad (2.35)$$

und nennen σ_{ik} den *Spannungstensor*: er beschreibt die Impulsstromdichte in i -Richtung aufgrund einer Kraftkomponente in k -Richtung. Solange der isotrope Druck p die einzige Quelle lokaler Kräfte ist, ist σ_{ik} dem Einheits-tensor proportional. Wenn aber Reibungskräfte hinzukommen dadurch, dass Flüssigkeitsschichten einander mitziehen, dann gibt es Impulstransport in einer Richtung aufgrund von Spannungen in einer anderen. Wir schreiben dann

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \quad (2.36)$$

und setzen für den einfachsten Fall an, dass σ'_{ik} in geeigneter Weise proportional zu den räumlichen Ableitungen der Geschwindigkeiten ist. Genauere Überlegungen zeigen, dass es zwei unabhängige Effekte geben kann; einer ist

⁴Ohne Berücksichtigung der Schwerkraft.

die Scher-Viskosität η , der andere die Volumen-Viskosität ζ . Man definiert sie, indem man zunächst feststellt, dass die allgemeinste Form von σ'_{ik}

$$\sigma'_{ik} = a \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ik}, \quad (2.37)$$

ist und dass man dies dann durch geeignetes Umschauen der Terme überführen kann in

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \right) + \zeta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ik}. \quad (2.38)$$

Der Grund für dieses Umschauen ist, dass nun der erste Term keine Spur mehr hat (Zerlegung eines symmetrischen Tensors in einen diagonalen und einen spurfreien Teil). Einsetzen in die Impulsbilanz führt dann auf die folgende modifizierte Euler-Gleichung:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \right) = \\ - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \delta_{ik} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \zeta \nabla \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Wenn nun die Viskositäten η und ζ konstant sind, kann man sie vor die Differentialoperatoren ziehen, und es lassen sich die Terme zusammenfassen, die lediglich Ableitungen der Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{u}$ sind:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}). \quad (2.40)$$

Dies ist eine Gleichung, in der das Fluid noch kompressibel sein kann. Nimmt man allerdings an, dass $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, dann verschwindet der letzte Term und man erhält die *Navier-Stokes-Gleichung*

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{u}. \quad (2.41)$$

Der hierzu passende Spannungstensor ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) ist

$$\sigma_{ik} = p \delta_{ik} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (2.42)$$

In der Navier-Stokes-Gleichung kommt es nur auf die Kombination $\nu = \eta/\rho$ der Viskosität an, die von der Dimension einer Diffusionskonstante ist (m^2/s) und tatsächlich einen diffusen Transport des Impulses beschreibt. (Wird vielleicht später noch klar, falls wir dazu kommen, die Anregungsmoden in einem realen Fluid zu diskutieren.) Typische Werte von ν sind $10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$, wobei die

Vorfaktoren von 68 bei Glycerin über 1.5 bei Luft, 0.1 bei Wasser bis zu 0.012 bei Quecksilber reichen.

Bei der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen ist noch die Randbedingung

$$\mathbf{u} = 0 \quad (2.43)$$

zu erfüllen. Dies ist anders als bei Eulerschen Fluiden; dort kann man dieses „Festkleben“ am Rand nicht einmal fordern, wenn überhaupt Lösungen existieren sollen. Andererseits ist die Forderung tangentialer Strömung zu schwach, um die Lösung der Euler-Gleichungen eindeutig festzulegen. Hier ist das anders: die Randbedingung erzwingt eindeutige Lösungen, die dann allerdings sehr komplex sein können und z. B. typische Grenzschichten im Unterschied zum Hauptvolumen involvieren. Das Problem mit den Gleichungen ist klarerweise die Nichtlinearität $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$.

Die Kraft pro Flächeneinheit der Berandung heiße \mathbf{P} ; sie ist der Impulsstrom durch diese Fläche, also $\Pi_{ik}n_k df = (\rho u_i u_k - \sigma_{ik})n_k df = -\sigma_{ik}n_k df$, wenn das Oberflächenelement durch den Vektor $d^2\mathbf{r} = \mathbf{n}df$ dargestellt wird. Es ist also

$$P_i = pn_i - \sigma'_{ik}n_k. \quad (2.44)$$

Die Energie-Dissipation erhalten wir, indem wir die zeitliche Änderung der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}\rho \int \mathbf{u}^2 d^3\mathbf{r}$ ausrechnen. Das ist nun wieder eine etwas längliche Rechnung (s. § 16 in Landau-Lifshitz), aber der Gedankengang ist klar. Man führe die zeitliche Ableitung aus und setze die Navier-Stokes-Gleichungen ein. Ein Teil des Integranden erweist sich als Divergenz

$$\nabla \cdot \left(\rho \mathbf{u} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + p/\rho \right) - \mathbf{u}^t \boldsymbol{\sigma}' \right) \quad (2.45)$$

(wobei eine hoffentlich einsichtige Vektor-Notation benutzt wurde). Dieser Teil lässt sich nach Gauss in ein Oberflächenintegral über eine so weit wie möglich draußen liegende Fläche umwandeln. Es ist Null entweder deswegen, weil auf dem Rand $\mathbf{u} = 0$ gilt, oder weil weit draußen das Fluid in Ruhe sein soll. Damit bleibt nur der Teil übrig, dessen Integrand man nicht als Divergenz schreiben kann:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2}\eta \int \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 d^3\mathbf{r}. \quad (2.46)$$

Dies zeigt, wie die Scherkräfte über die Viskosität zur Verminderung der kinetischen Energie beitragen. Wenn das Geschwindigkeitsfeld aufgrund äußeren Antriebs konstant gehalten wird, dann wird diese Energieabnahme als

Erwärmung und Entropie-Produktion in Erscheinung treten.

An dieser Stelle kann man noch einmal die Einführung dimensionsloser Größen diskutieren: Längen in Einheiten typischer Systemabmessungen L , Geschwindigkeiten in Einheiten typischer vorgegebener Werte U ; dann lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen mit einem einzigen Parameter

$$\text{Re} = \frac{\rho UL}{\eta} = \frac{UL}{\nu} \quad (2.47)$$

schreiben, der Reynoldszahl; es gilt $\mathbf{u}/U = f(\mathbf{r}/L; \text{Re})$. Einfach zu behandeln ist nur der Bereich $\text{Re} \ll 1$, weil dort der Konvektionsterm $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \sim U^2/L$ gegenüber dem dissipativen Term $\nu \Delta \mathbf{u} \sim \nu U/L^2$ klein ist und daher die Gleichungen linear werden.

Als besonders schönes und klassisches Beispiel, in dem die Navier-Stokes-Gleichungen ohne den Konvektionsterm lösbar sind, ist das Problem der stationären Strömung um eine Kugel herum (Stokes). Es reicht die Zeit nicht, die Lösung im Einzelnen vorzuführen, aber in Landau-Lifshitz § 20 kann man das nachlesen. Zu lösen sind bei ruhender Kugel von Radius R die Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{und} \quad \eta \Delta \mathbf{u} = \nabla p \Rightarrow \Delta(\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (2.48)$$

mit Randbedingungen $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v} = \text{const}$ im Unendlichen und $\mathbf{u} = 0$ auf der Kugeloberfläche. Am Ende einer längeren Rechnung findet man das Strömungsfeld

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \frac{3R}{4r}(\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}) - \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3(\mathbf{v} - 3(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.49)$$

das natürlich zylindersymmetrisch zur \mathbf{v} -Achse ist. Mit r ist der Abstand vom Kugelmittelpunkt gemeint, $r = |\mathbf{r}|$, und $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ ist der Einheitsvektor, vom Koordinatenursprung im Mittelpunkt der Kugel gesehen. Aus dem Geschwindigkeitsfeld lässt sich mit (2.48) das Druckfeld bestimmen; nach einiger Rechnung ergibt sich

$$p = p_\infty + \frac{3}{2}\eta(\mathbf{v} \cdot \nabla)\frac{R}{r} = p_\infty - \frac{3}{2}\eta R \frac{\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (2.50)$$

für den ganzen vom Fluid eingenommenen Raum. Es bleibt, hiermit die Kraft auf die Kugel zu berechnen. Dazu benutzen wir die Gl. (2.44) und integrieren über die Kugel. Dazu muss man nun allerdings den Spannungstensor in Kugelkoordinaten darstellen, was ich aus Gründen der knappen Zeit in der Vorlesung nicht schaffe. Am Ende, nach Integration über die Oberfläche der Kugel, steht das berühmte Ergebnis

$$F = 6\pi\eta v R \quad (2.51)$$

für die Kraft, die die Strömung auf die Kugel ausübt. Sie wird z. B. benutzt, um die Reibung anzugeben, die Regentropfen beim Fallen durch die Atmosphäre erfahren. Die Andeutung der Herleitung hier soll einen Eindruck davon vermitteln, wie einerseits bewundernswert die Leistung von George Gabriel Stokes (1819-1903) war, der diese Formel fand, wie andererseits beschränkt die Gültigkeit sein muss, wenn $Re \ll 1$ vorausgesetzt wird. Schon im Bereich weiter außerhalb der Kugel ist die Vernachlässigung des Konvektionsterms nicht mehr erlaubt, und Oseen hat 1910 einen Korrekturfaktor $(1 + 3vR/8\nu)$ bestimmt, der aber auch nicht viel weiter trägt.

Es ist allgemein akzeptiert, dass die Navier-Stokes-Gleichungen die Phänomenologie der inkompressiblen Strömungen bei konstanter Temperatur exzellent beschreiben. Computer-Simulationen bestätigen das eindrucksvoll (nachschauen auf der Homepage von P. Cvitanović), von laminarer bis hin zu voll turbulenter Strömung. Aber es bleibt trotz großer Leistungen von Stokes über Prandtl, Kolmogorov, Großmann und vieler Anderer die deprimierende Einsicht, dass unser Geist dieser Komplexität nicht gewachsen ist: ja, wir können sie mit starken Computern simulieren, wir verstehen sie auf der Ebene der Grundgleichungen (Navier-Stokes), aber irgendwie entzieht sich das Geschehen unserem Verständnis.

2.3 Wärmeleitung in Fluiden. Diffusion

Will man außer der Viskosität auch die Wärmeleitung berücksichtigen, so benötigt man für einkomponentige Fluide noch eine weitere Ergänzung. Sie betrifft nicht die Erhaltungsgleichungen für Masse (2.3) und Impuls (2.40), wohl aber die für Energie/Entropie/Temperatur, denn es soll ein Energietransport durch Wärme hinzugenommen werden. Dabei wird in niedrigster sinnvoller Näherung angenommen, dass die Wärmestromdichte proportional zum lokalen Temperatur-Gradienten und ihm entgegen gerichtet ist,

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T. \quad (2.52)$$

κ heißt *Wärmeleitfähigkeit*. Dies muss in die Energiebilanz (2.17) eingebracht werden, deren Energiestromdichte nach bisherigem Stand (2.45) bereits den viskosen Term $u_i \sigma'_{ik}$ mit σ'_{ik} gemäß (2.38). Insgesamt ist dann die Energiebilanz

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho \epsilon \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho u_k \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 + w \right) - u_i \sigma'_{ik} - \kappa T \right) = 0 \quad (2.53)$$

Man kann dies unter Ausnutzung der thermodynamischen Identität $d\epsilon = Tds + (p/\rho^2)d\rho$ und der Bilanzgleichungen für ρ und \mathbf{u} umformen in eine

Gleichung für die Entropiedichte:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) s \right) = \sigma'_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (2.54)$$

Dies wird als allgemeine Wärmeleitungsgleichung bezeichnet. Der Weg von (2.53) nach (2.54) findet sich z. B. in Landau/Lifshitz. Bei inkompressiblen Fluiden $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ und kleinen Temperaturvariationen kann man annehmen, dass die Transportkoeffizienten η und κ konstant und dass die Druckvariationen vernachlässigbar sind. Dann hängt $s = s(T, p)$ nur noch von T ab, $s = s(T)$, und es gilt

$$T ds = T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_p dT = c_p dT \quad \Rightarrow \quad T \nabla s = c_p \nabla T, \quad (2.55)$$

was auf die Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \chi \Delta T + \frac{\nu}{2c_p} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2.56)$$

führt, wobei außer der kinematischen Viskosität $\nu = \eta/\rho$ noch eine zweite Diffusionskonstante auftritt, die *thermische Diffusivität* $\chi = \kappa/(\rho c_p)$.

Bereits für ein ruhendes Fluid gibt das eine nicht-triviale Gleichung: die nach Fourier benannte Wärmeleitungs-Gleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T. \quad (2.57)$$

Das ist der Prototyp einer Diffusionsgleichung. Sie ist zu lösen meist mit der Randbedingung, dass auf dem Rand T vorgegeben ist. Die Methoden dazu kennt man aus der Elektrodynamik oder von der Schrödinger-Gl. für freie Teilchen, wobei nur $t \rightarrow it$ zu setzen wäre. Vorzugeben ist bei $t = 0$ eine mit den Randbedingungen kompatible Anfangsverteilung $T(\mathbf{r}, 0)$, und dann bestimmt (2.57) den weiteren Zeitverlauf. Im unendlichen Raum wäre die Methode der Wahl eine Zerlegung nach Fourier-Komponenten. Das brauche ich hier nicht auszuführen. Das Ergebnis ist

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int T(\mathbf{r}', 0) e^{-\chi k^2 t} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{k}. \quad (2.58)$$

Falls die Anfangsverteilung eine δ -Funktion ist, $T(\mathbf{r}, 0) = a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, dann ergeben die bekannten Methoden der Integration

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{a}{(4\pi\chi t)^{3/2}} e^{-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 / 4\chi t}. \quad (2.59)$$

Der anfängliche Peak zerfällt als Gauß-Verteilung, deren Breite proportional zu \sqrt{t} wächst. Die Amplitude nimmt $\propto t^{-3/2}$ ab, so dass am Ende $T(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0$ geht. Falls allerdings weit draußen eine endliche Temperatur vorgegeben ist, dann sind (2.57) und (2.58) natürlich für die Abweichung δT gemeint. Deren Zerfall ist ein dissipativer Prozess.

2.4 Schall

Im Gegensatz zu diffusiven Moden wie der Wärmeleitung gibt es schon in einfachen Fluiden auch eine propagierende Mode, den Schall. In seiner reinsten Form (d. h. ungedämpft) tritt er bereits in kompressiblen idealen Fluiden auf. Da er eine Dichte- und Druckwelle ist, kann er in inkompressiblen Fluiden natürlich nicht auftreten. Schauen wir also nach den elementaren hydrodynamischen Gleichungen, die Schall enthalten.

Wir nehmen an, dass die Oszillationen von ρ , p , \mathbf{u} so klein seien, dass man die Transport-Gleichungen in ihnen linearisieren kann. Es fallen also die konvektiven Terme weg, weil sie von zweiter Ordnung sind. Mit $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho$, $p = \bar{p} + \delta p$ und der Annahme, dass \mathbf{u} von gleicher Ordnung klein ist wie $\delta\rho$ und δp , erhalten wir aus den Gln. (2.3) und (2.4) (ohne Schwerkraft)

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \delta p = 0. \quad (2.60)$$

Das sind zwei Gleichungen für die drei Unbekannten $\delta\rho$, δp und \mathbf{u} . Ein geschlossenes System erhalten wir mit der Eigenschaft idealer Fluide, dass der Transport in ihnen adiabatisch stattfindet. Es gilt also zwischen δp und $\delta\rho$ die Beziehung

$$\delta p = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \delta \rho = \frac{1}{\bar{\rho} \kappa_s} \delta \rho, \quad (2.61)$$

wobei κ_s die adiabatische Kompressibilität ist. Hiermit lässt sich die erste der Gln. (2.60) in eine für die Druckvariationen umwandeln, und wir erhalten

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + \frac{1}{\kappa_s} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \delta p = 0. \quad (2.62)$$

Dieses Gleichungssystem ist leicht zu durchschauen, indem man eine der Gleichungen noch einmal nach t ableitet und dann die andere einsetzt. Das Ergebnis sind die Wellengln.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\bar{\rho} \kappa_s} \Delta \right) \delta p = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\bar{\rho} \kappa_s} \Delta \right) \mathbf{u} = 0. \quad (2.63)$$

Die Geschwindigkeit c der Wellen ist gegeben durch

$$c^2 = \frac{1}{\bar{\rho}\kappa_s} = \frac{c_p}{c_v} \frac{1}{\bar{\rho}\kappa_T}, \quad (2.64)$$

Letzteres nach einer bekannten thermodynamischen Beziehung. Die Lösungen solcher Wellengln. müssen wir nicht mehr diskutieren.

Im Falle eines idealen Gases hat man $p = (k_B T/m)\rho$ mit m als molekularer Masse. Dann ist $\partial p/\partial \rho|_T = k_B T/m$ und daher

$$c^2 = \frac{k_B T}{m} \frac{c_p}{c_v}. \quad (2.65)$$

2.5 Die hydrodynamischen Moden im Gleichgewicht

Dieser letzte Teil wurde in der Vorlesung nur andeutungsweise behandelt, in den Übungen ausführlicher. Es wird hier im Wesentlichen wiedergegeben, was auf dem Lösungsblatt für die Übung 5 steht. Als Quellen gebe ich an Landau/Lifshitz und das Buch „Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry, and Correlation Functions“ von D. Forster, Benjamin, Reading 1975.

Wir benutzen die folgenden fünf Grundgleichungen der Hydrodynamik ein-komponentiger Newtonscher Fluide:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\eta}{3\rho} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) s &= -\frac{\kappa}{\rho T} \Delta T \end{aligned} \quad (2.66)$$

und gehen aus vom stationären globalen thermodynamischen Gleichgewichtszustand $\mathbf{u} = 0$, $\rho = \rho_0$, $p = p_0$, $s = s_0$ (mit Zustandsgleichungen $p = p(\rho, s)$ und $T = T(\rho, s)$, die Druck- und Temperaturänderungen mit denen der hier unabhängigen Variablen ρ, s verknüpfen). Wir betrachten dann kleine Fluktuationen um diesen Zustand, $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, $s = s_0 + \delta s$, und $\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}$ (so dass man bei \mathbf{u} das δ auch weglassen kann). Da \mathbf{u} in erster Ordnung klein ist, fallen die Terme $\propto u_i^2$ weg. Es bleiben nur

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} &= -\rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla \delta p + \frac{\eta}{\rho_0} \Delta \mathbf{u} + \left(\frac{\zeta}{\rho_0} + \frac{\eta}{3\rho_0} \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \\ \frac{\partial \delta s}{\partial t} &= -\frac{\kappa}{\rho_0 T_0} \Delta \delta T. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Um dies zu einem geschlossenen Gleichungssystem für $\delta\rho$, \mathbf{u} und δs zu machen, muss man nun noch einsetzen

$$\delta p = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \delta \rho + \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_\rho \delta s, \quad \delta T = \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_s \delta \rho + \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_\rho \delta s. \quad (2.68)$$

Nun denke man sich den Ansatz ebener Wellen $e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ gemacht, so dass zu ersetzen ist $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ und $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$. Dann erhält man (als Argumente der Fluktuationen sind immer \mathbf{k}, ω gemeint, und die Indizes 0 bei ρ_0, T_0 etc. werden jetzt weggelassen)

$$\begin{aligned} -i\omega\delta\rho &= -\rho i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} \\ -i\omega\mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s i\mathbf{k}\delta\rho - \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_\rho i\mathbf{k}\delta s - \frac{\eta}{\rho} \mathbf{k}^2 \mathbf{u} - \left(\frac{\zeta}{\rho} + \frac{\eta}{3\rho} \right) \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}) \\ -i\omega\delta s &= -\frac{\kappa}{\rho T} \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_s \mathbf{k}^2 \delta\rho - \frac{\kappa}{\rho T} \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_\rho \mathbf{k}^2 \delta s \end{aligned} \quad (2.69)$$

Dieses System von 5 Gleichungen werde nun in drei longitudinale und zwei transversale Gleichungen (bzgl. der Richtung \mathbf{k}) zerlegt, indem wir den Ansatz $\mathbf{u} = u_l \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{u}_t$ mit $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ und $\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_t = 0$ machen. Die erste Gleichung in (2.69) reduziert sich wegen $\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} = ku_l$ auf die rein longitudinale Gleichung

$$\omega\delta\rho = k\rho u_l. \quad (2.70)$$

Bei der zweiten Gleichung setzen wir ein $\mathbf{u} = u_l \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{u}_t$ und benutzen wieder $\mathbf{k}\cdot\mathbf{u} = ku_l$. Dann können wir ablesen, welche Terme parallel zu \mathbf{k} sind und welche senkrecht darauf stehen. Die longitudinalen Terme geben

$$\omega u_l = \frac{k}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \delta\rho + \frac{k}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_\rho \delta s - ik^2 \left(\frac{4\eta}{3\rho} + \frac{\zeta}{\rho} \right) u_l, \quad (2.71)$$

und die transversalen

$$\omega \mathbf{u}_t = -ik^2 \frac{\eta}{\rho} \mathbf{u}_t. \quad (2.72)$$

Die Gleichung für δs koppelt nur an $\delta\rho$, gehört also zu den longitudinalen Gleichungen:

$$\omega\delta s = -ik^2 \frac{\kappa}{\rho T} \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_s \delta\rho - ik^2 \frac{\kappa}{\rho T} \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_\rho \delta s. \quad (2.73)$$

Damit haben wir eine Gleichung (2.72) für die beiden transversalen Komponenten und drei für die longitudinalen, nämlich (2.70), (2.71), (2.73).

Die beiden transversalen Moden haben die Dispersionsrelation

$$\omega = -i\nu k^2 \quad \text{mit} \quad \nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (2.74)$$

Das entspricht einem diffusiven Verhalten mit Diffusionskonstante ν . Es handelt sich um den diffusiven Transport des Impulses quer zur Richtung der Geschwindigkeit.

Um die drei anderen Moden zu finden, lesen wir in (2.69) die folgende Matrix ab, deren Eigenwerte zu bestimmen sind:

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} \omega & -k\rho & 0 \\ -\frac{k}{\rho}c^2 & \omega + ik^2D_l & -\frac{k}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}\Big|_{\rho} \\ ik^2\frac{\kappa}{\rho T}\frac{\partial T}{\partial \rho}\Big|_s & 0 & \omega + ik^2D_V \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

mit $c^2 := \partial p / \partial \rho|_s$, $D_l := (\frac{4}{3}\eta + \zeta) / \rho$, $D_V := \frac{\kappa}{\rho c_V}$ und $c_V = T \partial s / \partial T|_{\rho}$. Man sieht zuerst, dass $\omega(k)$ mindestens linear in k sein muss, und etwas längeres Hinschauen zeigt, dass es eine diffuse und zwei gedämpfte Schallwellenmoden gibt. Wir machen also den Ansatz

$$\det \mathbf{M} = (\omega + ik^2D_T)(\omega - ck + \frac{1}{2}ik^2\Gamma)(\omega + ck + \frac{1}{2}ik^2\Gamma) \quad (2.76)$$

wobei die Dämpfungskonstanten D_T und Γ in jeweils niedrigster Ordnung von k durch Vergleich mit dem charakteristischen Polynom von \mathbf{M} zu bestimmen ist. Das D_T ergibt sich, wenn wir $\omega \rightarrow 0$ gehen lassen, in $O(k^4)$:

$$c^2D_T = c^2D_V - D_V \frac{c_v}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho}\Big|_s \frac{\partial p}{\partial s}\Big|_{\rho} \quad (2.77)$$

Nun ist aber (man setze noch den Ausdruck für c^2 ein)

$$\frac{1}{T} \frac{\partial \rho}{\partial p}\Big|_s \frac{\partial T}{\partial \rho}\Big|_s \frac{\partial p}{\partial s}\Big|_{\rho} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial p}\Big|_s \frac{\partial p}{\partial s}\Big|_{\rho} = \frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p}, \quad (2.78)$$

denn wenn man T als Funktion von s und p auffasst, $dT = (\partial T / \partial s)|_p ds + (\partial T / \partial p)|_s dp$, dann findet man

$$\frac{T}{c_V} - \frac{T}{c_p} = \frac{\partial T}{\partial s}\Big|_{\rho} - \frac{\partial T}{\partial s}\Big|_p = \frac{\partial T}{\partial p}\Big|_s \frac{\partial p}{\partial s}\Big|_{\rho}. \quad (2.79)$$

Es folgt, dass sich (2.77) schreiben lässt

$$D_T = \frac{\kappa}{\rho c_p} = \chi, \quad (2.80)$$

wie wir es bereits aus der Diskussion der Wärmeleitung kennen. Die Wärmeleitung ist also eine der longitudinalen Moden.

Nachdem wir D_T haben, ist Γ leicht bestimmt, indem wir den Koeffizienten von $i\omega^2 k^2$ im charakteristischen Polynom mit dem entsprechenden Term im Ansatz vergleichen. Das Ergebnis ist

$$\Gamma = D_l + D_V - D_T = D_l + D_T \left(\frac{c_p}{c_v} - 1 \right). \quad (2.81)$$

Damit haben wir als zwei longitudinale Moden die Schallwellen mit den Geschwindigkeiten $\pm c$ gefunden und der durch Γ gegebenen Dämpfung. Es tragen sowohl die Wärmeleitung als auch Diffusion zur Dämpfung des Schalls bei.

3 Spezielle Relativitätstheorie

Einstein destillierte seine SRT aus zwei Grundannahmen:

1. Inertialsysteme sind physikalisch ununterscheidbar; dies bedeutete das Festhalten an einem Grundprinzip der Galileischen Mechanik.
2. Die Lichtgeschwindigkeit c ist in allen Inertialsystemen dieselbe; dies war eine mutige Extrapolation der negativen Ergebnisse des Michelson-Versuchs („Einstein sagte schlicht: Äther gibt es nicht“) und ein Ernstnehmen der Tatsache, dass die Maxwell-Gleichungen nicht Galilei-invariant sind.

Das Problem war also, diese zwei zunächst unvereinbaren Annahmen miteinander in Einklang zu bringen. Die Lösung war das Postulat:

Inertialsysteme IS sind alle diejenigen, die sich aus einem gegebenen IS durch lineare Transformationen

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} + \mathbf{b} \quad (3.1)$$

der Raumzeit ergeben, sofern das folgende Skalarprodukt invariant bleibt:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2 dt'^2 - d\mathbf{r}'^2 = c^2 d\tau'^2. \quad (3.2)$$

Dabei ist \mathbf{b} eine konstante Verschiebung von Raum und Zeit, was keine wesentliche Rolle spielt. \mathbf{L} ist, wenn denn die Forderung an das Skalarprodukt erfüllt ist, die Matrix einer *Lorentz-Transformation*.

3.1 Minkowski-Raumzeit und Kinematik

Wenn (t, \mathbf{r}) und $(t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$ benachbarte Punkte sind, nennt man $ds = \sqrt{-c^2 d\tau^2}$ ihren *Abstand* und $d\tau = ds/c$ die zwischen ihnen abgelaufene *Eigenzeit*. Man beachte, dass ds keine Metrik im üblichen Sinne ist, denn ds^2 ist nicht positiv definit. Man spricht von einer *Pseudo-Metrik*. Ein gegebener Punkt (t, \mathbf{r}) definiert eine Zerlegung der gesamten *Raum-Zeit* in dreierlei Bereiche: Punkte (t', \mathbf{r}') , für die gilt

- $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - c^2|t - t'|^2 > 0$, haben einen *raumartigen* Abstand,
- $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 - c^2|t - t'|^2 < 0$, haben einen *zeitartigen* Abstand,
- $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = c^2|t - t'|^2$, haben einen *lichtartigen* Abstand.

Letztere Gleichung definiert den zu (t, \mathbf{r}) gehörigen Lichtkegel; die Punkte mit $ct = ct' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ bilden den *Vorwärts-Lichtkegel*, die mit $ct = ct' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ den *Rückwärts-Lichtkegel*.

3.1.1 Lorentz-Transformationen

Wir wollen, auch wenn das im Rahmen der SRT nicht nötig ist (s. Landau-Lifshitz), eine Notation mit kontra- und kovarianten Vektoren benutzen. Es sei per definitionem

$$\begin{aligned}x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \\x_\mu &= (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Die oben definierte (Pseudo-)Metrik ist dann gegeben durch den Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\nu\mu}, \quad g_{\mu\nu}^{-1} =: g^{\mu\nu},\tag{3.4}$$

mit $g_{\lambda\mu}g^{\mu\nu} = \delta_\lambda^\nu = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$. Als Matrizen sind $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ offenbar gleich. Das Skalarprodukt kann man nun schreiben (man beachte die Einsteinsche Summenkonvention)

$$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = dx_\mu dx^\mu.\tag{3.5}$$

Als *Lorentz-Transformationen* (LT) bezeichnet man lineare Abbildungen des x^ν -Raums (der Raum-Zeit), die dieses Skalarprodukt invariant lassen:

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \quad \text{mit} \quad x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu.\tag{3.6}$$

Aus dieser Bedingung folgt, dass

$$L^\mu_\rho g_{\mu\nu} L^\nu_\sigma g^{\sigma\tau} = \delta_\rho^\tau\tag{3.7}$$

sein muss. Wenn wir L^μ_ν als Matrix \mathbf{L} schreiben und L_ν^μ als transponierte Matrix \mathbf{L}^t (die Reihenfolge von Zeilen- und Spaltenindex ist vertauscht, ohne dass oben und unten verändert wird), also

$$L^{t\mu}_\nu = L_\nu^\mu,\tag{3.8}$$

dann ist (3.7) die Matrixgleichung

$$\mathbf{L}^t \mathbf{g} \mathbf{L} g^{-1} = \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{L}^t = \mathbf{g} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{g}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{L}^{-1t} = \mathbf{g} \mathbf{L} \mathbf{g}^{-1}.\tag{3.9}$$

Die letzte Gleichung lautet wiederum in Komponenten (man beachte, dass \mathbf{g} Indizes herunter- und \mathbf{g}^{-1} Indizes heraufzieht,

$$(L^{-1t})^\mu_\nu = L_\nu^\mu.\tag{3.10}$$

Während also die Transposition gemäß (3.8) die Indizes in der Horizontalen vertauscht, bewirkt die kombinierte Transposition und Inversion das Vertauschen von oben und unten. Die Matrix in (3.10) definiert aber die Transformation der kovarianten Vektoren, wie man durch Einsetzen in $x'_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$ sofort bestätigt:

$$x'_\mu = L_\mu{}^\nu x_\nu. \quad (3.11)$$

Es ist nützlich, sich ein für allemal klarzumachen, wie sich die Matrizen $A^\mu{}_\nu$ und $A_\mu{}^\nu = g_{\mu\rho}A^\rho{}_\sigma g^{\sigma\nu}$ zueinander verhalten:

$$A^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & -a_{03} \\ -a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

3.1.2 Die Lorentz-Gruppe

Fragen wir nun genauer, welche linearen Transformationen als LT in Frage kommen. Aus (3.7) entnehmen wir

$$(\det \mathbf{L})^2 = 1. \quad (3.13)$$

Im Übrigen erinnert (3.7) an die Eigenschaften der orthogonalen Transformationen, die ja Vektoren im 3-dimensionalen euklidischen Raum definieren (dort ist die Metrik in kartesischen Koordinaten die Einheits-Matrix). Deswegen ist klar, dass die räumlichen orthogonalen Transformationen \mathbf{D} in der sinngemäß erweiterten Form

$$\mathbf{L}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Lorentz-Transformationen sind, denn es gilt $\mathbf{D}\mathbf{D}^t = \mathbf{1}$. Für solche Matrizen zeigt (3.12), dass $L^\mu{}_\nu = L_\mu{}^\nu$, dass also ko- und kontravariante Vektoren auf gleiche Weise transformiert werden; man braucht sie in der Newtonschen Mechanik deswegen nicht zu unterscheiden.

Interessanter sind die sog. *Boosts*, bei denen räumliche und zeitliche Koordinaten vermischt werden. Sie sind die Einsteinschen Verallgemeinerungen der Galilei-Transformationen. Die einfachste darunter betrifft nur die x -Koordinate und die Zeit:

$$x' = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} =: \mathbf{L}(v)x, \quad (3.15)$$

wobei

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.16)$$

die Relativgeschwindigkeit der Inertialsysteme IS und IS' beschreiben. In Beschränkung auf die relevanten Koordinaten hat man

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \beta \gamma x = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' &= \gamma x - \beta \gamma ct = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Man sieht, dass die beiden Bezugssysteme in den Punkten $(t, x) = (t', x') = (0, 0)$ übereinstimmen und dass IS' sich relativ zu IS mit der Geschwindigkeit v in positiver x -Richtung bewegt. Man prüft leicht nach, dass das Inverse dieser LT sich einfach durch $v \rightarrow -v$ bzw. $\beta \rightarrow -\beta$ ergibt.

Bei den orthogonalen Transformationen \mathbf{D} gibt es die reinen Drehungen, für die $\det \mathbf{D} = 1$ ist, und die Dreh-Spiegelungen, bei denen $\det \mathbf{D} = -1$ ist. Die allgemeine LT kann man nun zusammensetzen aus

- reinen räumlichen Drehungen \mathbf{D} ,
- der Raumspiegelung $P : (ct, \mathbf{r}) \rightarrow (ct, -\mathbf{r})$,
- der Zeitspiegelung $T : (ct, \mathbf{r}) \rightarrow (-ct, \mathbf{r})$,
- Boosts mit Relativgeschwindigkeit \mathbf{v} zwischen IS und IS'.

Die \mathbf{D} haben drei Parameter (z. B. die Eulerschen Winkel) und die Boosts haben ebenfalls drei Parameter. Insgesamt bilden die LT eine Gruppe mit sechs Parametern, die *Lorentz-Gruppe*. Sie hat vier Zusammenhangskomponenten, wobei die *eigentliche Lorentz-Gruppe* keine Raum- und keine Zeit-Spiegelung enthält; es ist die Komponente, die das 1-Element enthält. Die drei anderen Komponenten enthalten entweder P oder T oder beide. Eine im Prinzip triviale Verallgemeinerung der LT erhält man noch, indem man Translationen zwischen IS und IS' um einen konstanten Vektor hinzunimmt und die Forderung (3.6) auf Differenzvektoren in IS und IS' bezieht. Dann erhält man die 10-parametrische *Poincaré-Gruppe*, von der aber im Folgenden nicht die Rede sein soll.

Die eigentliche Lorentzgruppe wird erzeugt von den \mathbf{D} und dem x -Boost. Denn man kann jeden anderen Boost dadurch erhalten, dass man zuerst eine

Drehung macht, bei der die x - und x' -Achsen parallel liegen, dann den x -Boost und schließlich die inverse Drehung. Das Ergebnis ist

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & & -\gamma\boldsymbol{\beta}^t \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \delta_{ij} + (\gamma - 1)v_i v_j / v^2 & \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

wobei $\boldsymbol{\beta}^t = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ mit $\beta_i = v_i/c$ ist; die Indizes i, j laufen von 1 bis 3. Die Matrix zu diesem reinen Boost ist symmetrisch, aber wenn man noch eine Drehung anhängt, erhält man für die allgemeine LT eine nicht unbedingt symmetrische Matrix:

$$x' = \mathbf{L}(\mathbf{D})\mathbf{L}(\mathbf{v})x. \quad (3.19)$$

Die Hintereinanderausführung zweier Boosts entspricht einer *Geschwindigkeitsaddition*. Es gilt $\mathbf{L}(\mathbf{v}_2)\mathbf{L}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{L}(\mathbf{D})\mathbf{L}(\mathbf{v})$ mit

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{2\parallel} + \mathbf{v}_{2\perp}/\gamma_1}{1 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2/c^2}, \quad (3.20)$$

und einer Drehung \mathbf{D} , wobei $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}_1^2/c^2}$ und $\mathbf{v}_{2\parallel} = \mathbf{v}_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)/v_1^2$ die Komponente von \mathbf{v}_2 in Richtung \mathbf{v}_1 ist, $\mathbf{v}_{2\perp} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{2\parallel}$ die Komponente senkrecht dazu. Diese Summe ist nur dann in den beiden Geschwindigkeiten symmetrisch, wenn diese die gleiche Richtung haben; dann gilt nämlich

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}. \quad (3.21)$$

Als interessantes Beispiel betrachten wir die Hintereinanderausführung eines Boosts in x -Richtung und eines in y -Richtung (die z -Richtung können wir dann ignorieren). Es sei

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\gamma_1\beta_1 & 0 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} \gamma_2 & 0 & -\gamma_2\beta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Es ist dann $\mathbf{v}_{2\parallel} = 0$ und $\mathbf{v}_{2\perp} = \mathbf{v}_2$, so dass

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2}{\gamma_1} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\sqrt{1 - \beta_1^2}. \quad (3.23)$$

Wir berechnen

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}_2)\mathbf{L}(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} \gamma_1\gamma_2 & -\gamma_1\gamma_2\beta_1 & -\gamma_2\beta_2 \\ -\gamma_1\beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ -\gamma_1\gamma_2\beta_2 & \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Diese Matrix ist nicht symmetrisch, ist also kein reiner Boost. Durch eine Drehung in der (x, y) -Ebene sollte daraus aber ein Boost werden. Wir suchen deshalb eine Matrix vom Typ (3.14), so dass dies als $\mathbf{L}(\mathbf{D})\mathbf{L}(\mathbf{v})$ dargestellt wird. Aus (3.23) und (3.18) kennen wir bereits die Matrix $\mathbf{L}(\mathbf{v})$:

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2/\gamma_1 \\ -\gamma_1\beta_1 & 1 - (\gamma - 1)\beta_1^2/\beta^2 & (\gamma - 1)\beta_1\beta_2/(\gamma_1\beta^2) \\ -\gamma\beta_2/\gamma_1 & (\gamma - 1)\beta_1\beta_2/(\gamma_1\beta^2) & 1 - (\gamma - 1)\beta_2^2/(\gamma_1^2\beta^2) \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

wobei $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ und $\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_1^2\beta_2^2$. Es ist nun nicht schwer, mit dem Ansatz

$$\mathbf{L}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

die Matrizen (3.24) und (3.25) zu verknüpfen. Wir finden

$$\cos \phi = \frac{\gamma_1\beta_1^2 + \gamma_2\beta_2^2}{\gamma\beta^2}, \quad \sin \phi = (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\gamma\beta^2}. \quad (3.27)$$

Zu der Geschwindigkeitsaddition gemäß (3.23) kommt also noch die Drehung mit einem Winkel ϕ hinzu, den wir aus

$$\tan \phi = (\gamma - 1)\frac{\beta_1\beta_2}{\gamma_1\beta_1^2 + \gamma_2\beta_2^2} \quad (3.28)$$

bestimmen.

Es ist manchmal nützlich, einen x -Boost durch den Parameter *Rapidity* ψ zu charakterisieren, wobei $\beta = \tanh \psi$ und $\gamma = \cosh \psi$ gesetzt wird. Dann lautet die LT (3.15)

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & -\sinh \psi \\ -\sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

und das Gesetz der Geschwindigkeitsaddition (bei gleicher Richtung) wird einfach $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Eine Anmerkung noch zum Newtonschen Limes, den man als $c \rightarrow \infty$ beschreiben kann, wobei dann allerdings statt der Variablen $x^0 = ct$ die Zeit direkt genommen werden muss. Die Trafo (3.18) wird in diesen Variablen

$$\begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^t/c \\ -\gamma\boldsymbol{\beta}c & \delta_{ij} + (\gamma - 1)v_iv_j/v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{v} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Dies ist die Galilei-Transformation.

3.1.3 Skalare und 4-Vektoren

In Analogie zur Newtonschen Mechanik mit ihrer Galilei-Invarianz definieren wir hier Skalare und Vektoren mit Bezug auf die LT (statt mit Bezug auf die orthogonalen Transformationen). 4-Skalare sind alle Größen, die sich unter LT nicht verändern, 4-Vektoren sind Größen, die sich wie die Komponenten x^μ („kontravariant“) oder x_μ („kovariant“) verändern. Als Skalare kennen wir die Invarianten ds^2 bzw. $d\tau^2 = -ds^2/c^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2/c^2$. Letztere können wir wie folgt mit der *Eigenzeit* in Zusammenhang bringen, die in einem gegebenen Körper abläuft. Dieser möge sich gegenüber einem IS in dessen Zeit dt um einen Weg $d\mathbf{r}$ bewegen, also mit der momentanen Geschwindigkeit $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Sein eigenes momentanes Inertialsystem sei IS'; dort ist $d\mathbf{r}' = 0$ und daher $dt' = d\tau$. In diesem Sinne ist also τ die Eigenzeit. Wegen der Invarianz von $d\tau^2 = dt^2 - d\mathbf{r}^2/c^2$ gilt

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2} = \frac{dt}{\gamma}. \quad (3.31)$$

Dies ist eine differentielle Gleichung, die man integrieren kann, wenn der Körper von IS aus gesehen sich mit der zeitlich veränderlichen Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ bewegt:

$$\tau = \int^t dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}. \quad (3.32)$$

Da die Wurzel nicht größer als 1 werden kann, ist die Eigenzeit immer kleiner als die von irgendeinem anderen System gemessene Zeit.

Als 4-Vektoren bezeichnen wir Größen $v = v^\mu$, deren vier kontravariante Komponenten sich gemäß (3.6) wie die x^μ transformieren:

$$v'^\mu = L^\mu_\nu v^\nu. \quad (3.33)$$

Durch Herunterziehen mit $g_{\mu\nu}$ erhalten wir die zugehörigen kovarianten Komponenten. Nachdem wir die 4-Vektoren x^μ und den Skalar τ kennen, können wir eine 4-Geschwindigkeit u^μ konstruieren,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma(c, \mathbf{v}). \quad (3.34)$$

Dieser Vektor verhält sich unter LT offenbar wie x^μ . Sein Betrag muss ein Skalar sein:

$$u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma^2 (c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2; \quad (3.35)$$

in der Tat! Das Ergebnis zeigt aber, dass u^μ zwar vier Komponenten, aber doch nicht mehr Information als \mathbf{v} hat. Wir können einen Schritt weiter gehen

und die 4-Beschleunigung einführen:

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}. \quad (3.36)$$

Wir werden eine Verallgemeinerung des 2. Newton-Gesetzes suchen, in dem sie mit der wirkenden Kraft in Beziehung gesetzt wird. An dieser Stelle sei nur gesagt, dass a^μ als 4-Vektor immer senkrecht auf der 4-Geschwindigkeit u^μ steht, denn wegen $u^\mu u_\mu = c^2 = \text{const}$ ist

$$u^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = 0. \quad (3.37)$$

Eine andere Sorte von 4-Vektoren erhalten wir, wenn wir skalare Felder nach den x^μ differenzieren. Es sind die 4-Verallgemeinerungen der Gradienten,

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla \right) \\ \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Und warum haben wir die Indizes so angeordnet wie gezeigt? Weil ∂_μ ein kovarianter und ∂^μ ein kontravarianter Vektor ist. Denn

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (L^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (L^{-1t})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = L^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (3.39)$$

Wir werden diese Vektoroperatoren im Zusammenhang mit der Elektrodynamik ausgiebig nutzen.

3.2 Mechanik

In der Mechanik haben wir es mit Impulsen, Kräften und Energien zu tun. Hierfür gibt es zwei Zugänge, den einen durch naheliegende Verallgemeinerung des 2. Newton-Gesetzes, den anderen über eine passende Lagrange-Funktion. Wir betrachten zunächst das freie Teilchen.

3.2.1 Impuls und Minkowski-Kraft

Nachdem wir die 4-Geschwindigkeit $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$ kennen und die Masse m eines Teilchens in seinem Ruhesystem eine Invariante sein muss, ist

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma(c, \mathbf{v}) \quad (3.40)$$

offenbar ein 4-Vektor, mit zugehöriger Invariante $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$. Er ist die natürliche Verallgemeinerung des Impulses, deshalb nennen wir ihn den 4-Impuls des Teilchens. Das 2. Newton-Gesetz sollte also eine Verallgemeinerung

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu \quad (3.41)$$

haben, wobei wir die 4-Kraft f^μ noch identifizieren müssen. Nun haben wir im Ruhesystem des Teilchens, das wir als IS' nehmen wollen,

$$\tau = t' \quad \text{und} \quad m \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \mathbf{F}. \quad (3.42)$$

Dabei nehmen wir an, dass die Kraft \mathbf{F} im Ruhesystem bekannt sei. Dann können wir umrechnen in das IS des Beobachters, wobei $dt = \gamma d\tau$ zu beachten ist. Zuerst berechnen wir

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{du^\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{d\gamma c}{dt}, \frac{d\gamma \mathbf{v}}{dt} \right) = \frac{\gamma^4}{c^2} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} (c, \mathbf{v}) + \gamma^2 \left(0, \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right), \quad (3.43)$$

wobei im letzten Schritt die Produktregel und $d\gamma/dt = (\gamma^3/c^2) \mathbf{v} \cdot (d\mathbf{v}/dt)$ benutzt wurde. Wir spezialisieren dies auf das momentane Ruhesystem IS, wo $dt' = d\tau$ und $\mathbf{v}' = 0$ ist,

$$\frac{du'^\mu}{d\tau} = \left(0, \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \right) \quad \Rightarrow \quad m \frac{du'^\mu}{d\tau} = (0, \mathbf{F}) = f'^\mu. \quad (3.44)$$

Da wir hiermit die 4-Kraft im Ruhesystem identifiziert haben, erhalten wir sie in einem beliebigen IS durch LT:

$$f^\mu = (L^{-1})^\mu{}_\nu f'^\nu. \quad (3.45)$$

Wenn sich IS gegenüber dem Ruhesystem IS' mit $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ bewegt, ist

$$f^\mu = (\beta\gamma F_1, \gamma F_1, F_2, F_3). \quad (3.46)$$

Bei allgemeinen Boosts mit Geschwindigkeit \mathbf{v} findet man

$$f^\mu = \left(\gamma \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{c}, \mathbf{F} + (\gamma - 1) \mathbf{v} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{v^2} \right). \quad (3.47)$$

Diese Kraft heißt *Minkowski-Kraft*. Sie ist wie die 4-Beschleunigung stets orthogonal zur 4-Geschwindigkeit, $f^\mu u_\mu = 0$.

Wenn keine Kraft wirkt, $\mathbf{F} = 0$ und damit $f^\mu = 0$, dann ist der 4-Impuls natürlich konstant. Der nächst einfache Fall ist der einer konstanten Kraft,

also die Verallgemeinerung des freien Falls in der Newton-Mechanik. Hier dürfen wir allerdings nicht an die Gravitationskraft denken, weil für diese die SRT erst noch zur ART erweitert werden muss. Aber die Bewegung eines Teilchens im konstanten elektrischen Feld ist ein Beispiel (etwa im Stanford Linear Accelerator SLAC). Sei deshalb $\mathbf{F} = (qE, 0, 0)$, wobei wir antizipieren, dass sich das elektrische Feld E bei Boosts in seiner eigenen Richtung, hier also bei x -Boosts, nicht ändert, $E' = E$; mit q ist die Ladung des Teilchens gemeint. Wir haben also für die x -Komponente der Bewegungsgleichung

$$m \frac{du^1}{d\tau} = f^1 \quad \Rightarrow \quad m\gamma \frac{d}{dt}(\gamma v) = \gamma qE \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{qE}{m}. \quad (3.48)$$

Dies lässt sich elementar integrieren. Zuerst folgt direkt $\gamma v = (qE/m)t$, was nach v aufgelöst

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + (at/c)^2}} \quad \text{mit } a = qE/m \quad (3.49)$$

ergibt (hier ist angenommen, dass das Teilchen zur Zeit $t = 0$ ruht). Für kleine Zeiten, $at \ll c$, gibt das den bekannten linearen Anstieg, $v \approx at$, für große Zeiten aber $v \rightarrow c$. Die Integration $x = \int v dt$ ist ebenfalls elementar und gibt

$$x = \frac{c^2}{a} (\sqrt{1 + (at/c)^2} - 1). \quad (3.50)$$

Für kleine Zeiten ist das $x \approx (a/2)t^2$, für große $x \approx ct - c^2/a$.

Wir werden im Zusammenhang mit der Elektrodynamik sehen, dass die Kraft auf ein Teilchen im elektromagnetischen Feld (\mathbf{E}, \mathbf{B}) die 4-Verallgemeinerung der Lorentz-Kraft ist,

$$f^\mu = (q\gamma\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}, q\gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})), \quad (3.51)$$

mit $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$.

3.2.2 Lagrange-Funktion

Wir möchten die Mechanik wie in der klassischen Theorie vom Hamilton-Prinzip her aufbauen, wonach die Bahn $\mathbf{r}(t)$ eines Teilchens die Wirkung zu einem Extremum macht, $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$; dabei werden bei der Variation der Bahn die Anfangs- und Endpunkte festgehalten. Für freie Teilchen ist $L = (m/2)\mathbf{v}^2$. In der SRT sollte die Wirkung $\int L dt$ der Bahn eine vom speziellen IS unabhängige Größe sein, also eine Invariante. Als einfachstes

Integral dieser Art bietet sich $\alpha \int d\tau$ an, wobei α eine Konstante ist, die durch Vergleich mit dem Newtonschen Limes zu bestimmen ist. Mit $d\tau = dt/\gamma$ hätten wir also

$$L = \alpha \sqrt{1 - v^2/c^2} = \alpha \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right), \quad (3.52)$$

wobei die Entwicklung für kleine v/c gemacht wurde. Dort soll aber L mit $(m/2)v^2$ übereinstimmen. Da es auf einen konstanten Beitrag zu L bei der Bewegungsgleichung nicht ankommt, muss also $\alpha = -mc^2$ sein, so dass die Lagrange-Funktion lautet

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3.53)$$

Schauen wir, was sich daraus nach den üblichen Regeln ergibt. Zuerst ist der kanonische Impuls

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\gamma\mathbf{v}. \quad (3.54)$$

Für die Energie gilt

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\gamma c^2. \quad (3.55)$$

Wir sehen, dass wegen

$$p^\mu = mu^\mu = m\gamma(c, \mathbf{v}) = (E/c, \mathbf{p}) \quad (3.56)$$

die Energie die 0-Komponente des Impulses ist, $p^0 = E/c$. Die Invariante $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$ führt dann auf die Gleichung

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (3.57)$$

womit sich für Teilchen in Ruhe, $\mathbf{p} = 0$, die Ruheenergie

$$E = mc^2 \quad (3.58)$$

ergibt, und für masselose Teilchen, $m = 0$, die Beziehung

$$E = |\mathbf{p}|c. \quad (3.59)$$

Die Bewegungsgleichung $dp^\mu/d\tau = 0$ für ein freies relativistisches Teilchen lässt sich auch konsequent in 4-Schreibweise herleiten, wenn wir für die Wirkung den Ausdruck

$$S = \int L dt = -mc^2 \int_A^B d\tau \quad (3.60)$$

benutzen und fordern $\delta S = 0$ bei festgehaltenen Anfangs- und Endpunkten A bzw. B . Mit $c d\tau = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ folgt

$$\begin{aligned}\delta S &= -mc \int_A^B g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{c d\tau} d\delta x^\nu = -m \int_{\tau_A}^{\tau_B} g_{\mu\nu} u^\mu \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} d\tau \\ &= -m g_{\mu\nu} u^\mu \delta x^\nu \Big|_A^B + m \int_{\tau_A}^{\tau_B} g_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{d\tau} \delta x^\nu d\tau \stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}\quad (3.61)$$

Im letzten Schritt wurde partiell integriert. Da nun $\delta x^\nu(B) = \delta x^\nu(A) = 0$ ist und ansonsten die Variation $\delta x^\nu(\tau)$ beliebig, schließt man wie üblich auf $du^\mu/d\tau = 0$.

Ehe wir die Lagrange-Funktion für ein geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld angeben, wollen wir im nächsten Abschnitt die relativistische Formulierung der Elektrodynamik behandeln. Vorher sei noch der relativistische Drehimpuls diskutiert. In der Newton-Mechanik ist $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ mit Komponenten $L_x = yp_z - zp_y$ etc., was offenbar die 4-Verallgemeinerung

$$L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu = \begin{pmatrix} 0 & L^{01} & L^{02} & L^{03} \\ L^{10} & 0 & L_z & -L_y \\ L^{20} & -L_z & 0 & L_x \\ L^{30} & L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

hat; dabei sind (L_x, L_y, L_z) die Komponenten des 3-Drehimpulses und für $i = 1, 2, 3$ ist $L^{0i} = -L^{i0} = p_i ct - Ex_i/c$. Der 4-Drehimpuls ist also ein antisymmetrischer Tensor zweiter Stufe.

3.3 Elektrodynamik

Im Gegensatz zur Mechanik bedarf die Elektrodynamik keiner relativistischen Verallgemeinerung, denn sie ist bereits eine relativistische Theorie. Lorentz hatte gezeigt, dass sie nicht gegenüber Galilei-Transformationen, wohl aber gegenüber LT invariant sind, und dabei hatte er die LT vor Einstein gefunden. Die Maxwell-Gleichungen sind allerdings noch nicht in der Sprache der Minkowski-Raumzeit formuliert, das soll jetzt für Felder im Vakuum nachgeholt werden.

3.3.1 Die Maxwell-Gleichungen

Ausgangspunkt sind die folgenden beiden Gruppen von Gleichungen. Die *inhomogenen Gleichungen* sind

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (3.63)$$

sie geben die Zusammenhang der Felder mit ihren Quellen an. Die *homogenen Gleichungen* sind

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}} = 0; \quad (3.64)$$

sie ermöglichen es, die Felder mit Hilfe der Potentiale φ und \mathbf{A} darzustellen. Es kommt noch hinzu die Ankopplung an die Mechanik über die Lorentz-Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.65)$$

wobei hier allerdings noch die relativistische Verallgemeinerung der Mechanik zu berücksichtigen ist.

Beginnen wir mit einer Konsequenz aus den inhomogenen Gleichungen. Wenn wir das Coulombgesetz nach der Zeit differenzieren und das Ampère-Maxwell-Gesetz einsetzen, finden wir das Gesetz der Ladungserhaltung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (3.66)$$

das wir mit ∂_μ gemäß (3.38) und $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ auch schreiben können

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (3.67)$$

Da dies in allen IS gilt, haben wir j^μ als 4-Vektor identifiziert. Dann aber ist es natürlich, die vier inhomogenen Maxwell-Gleichungen als eine 4-Gleichung zu schreiben. Mit ein wenig Ausprobieren findet man

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

Wir sehen, dass \mathbf{E} und \mathbf{B} zusammen einen Tensor 2. Stufe bilden, was dann auch ihr Verhalten unter LT definiert (s. unten).

Analog können wir die homogenen Gleichungen direkt umformulieren:

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0, \quad F^{*\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Der Tensor $F^{*\mu\nu}$ heißt der zu $F^{\mu\nu}$ duale Tensor. Man kann ihn mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols $\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ auch schreiben

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}F_{\sigma\tau}. \quad (3.70)$$

Dabei ist $\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ definiert als der vollständig antisymmetrische Tensor 4. Stufe,

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mu\nu\sigma\tau = 0123 \text{ oder eine gerade Permutation} \\ -1 & \text{falls } \mu\nu\sigma\tau \text{ eine ungerade Permutation von } 0123 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.71)$$

Es gilt übrigens $\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} = -\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$. Mit Hilfe von (3.70) kann man die homogenen Gln. auch durch $F^{\mu\nu}$ ausdrücken:

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0. \quad (3.72)$$

Wir wissen schon, dass man diese Gleichungen automatisch erfüllt, wenn man die Felder mit Hilfe der Potentiale φ und \mathbf{A} ausdrückt. Die Gleichungen $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/c\partial t - \nabla\varphi$ legen nahe, den 4-Vektor

$$A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}) \quad (3.73)$$

einzuführen. Es gilt dann offenbar

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (3.74)$$

Damit lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\nu. \quad (3.75)$$

Hier stört der zweite Term die Schönheit der Gleichung. Wir erinnern uns aber daran, dass man die Potentiale umeichen kann, ohne etwas an den physikalischen Feldern \mathbf{E} und \mathbf{B} zu verändern. In der 4-Schreibweise heißt dies, dass eine *Eich-Transformation*

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda \quad (3.76)$$

mit beliebiger skalarer Funktion $\Lambda(x)$ die Felder unverändert lässt. Nun ist $\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu \Lambda$; wenn man also bei vorgegebenem A^μ , für das noch nicht $\partial_\mu A^\mu$ verschwindet, Λ so bestimmt, dass $\partial_\mu \partial^\mu \Lambda = \partial_\mu A^\mu$ ist, dann hat man für das umgezeichnete Feld A'^μ die *Lorentz-Eichung*

$$\partial_\mu A'^\mu = 0, \quad (3.77)$$

und die inhomogenen Maxwell-Gleichungen nehmen die Form

$$\square A'^{\mu} = \frac{4\pi}{c} j^{\mu} \quad (3.78)$$

an, wobei der d'Alembert-Operator $\square = \partial_{\mu}\partial^{\mu} = (\partial/c\partial t)^2 - \nabla^2$ eingeführt wurde. Das ist eine inhomogene Wellengleichung für A'^{μ} . Die homogenen Gleichungen können wir vergessen, sobald wir mit dem 4-Feld A^{μ} arbeiten. Dieses Feld ist in der Tat das zentrale Feld der Elektrodynamik, was später in der Quanten-Elektrodynamik noch offensichtlicher wird. Maxwell muss das gespürt haben, als er in seiner grundlegenden Arbeit diesem Feld den ersten Buchstaben des Alphabets zuordnete (es kommt dann $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und so weiter).

Fragen wir jetzt explizit danach, wie sich die Felder transformieren. Als Elemente eines Tensors 2. Stufe erfüllen sie

$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}_{\sigma} L^{\nu}_{\tau} F^{\sigma\tau}. \quad (3.79)$$

Für einen x -Boost bedeutet das konkret

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - \beta B_z) & B'_y &= \gamma(B_y + \beta E_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z + \beta B_y) & B'_z &= \gamma(B_z - \beta E_y) \end{aligned} \quad (3.80)$$

Allgemein gilt, wenn IS' sich gegenüber IS mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} bewegt,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Dies zeigt, dass \mathbf{E} und \mathbf{B} keine voneinander unabhängige Existenz haben. Allerdings kann ein Feld, das in einem IS nur ein elektrisches ist, in keinem anderen Feld ein nur magnetisches sein, und umgekehrt.

Als Beispiel kann man hier diskutieren, wie das Feld einer Punktladung aussieht, wenn man es von einem ihr gegenüber gleichförmig bewegten IS aus betrachtet. Hierzu sei auf Abschnitt 11.10 im Buch von Jackson verwiesen.

3.3.2 Bewegung geladener Teilchen

Den 4-Ausdruck für die Lorentz-Kraft wollen wir aus der Lagrange-Funktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld herleiten. Dazu knüpfen wir an

die klassische Lagrangefunktion $L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + (q/c)\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\varphi$ an, bei der lediglich der erste Term gemäß Abschnitt 3.2.2 zu verallgemeinern ist:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \frac{q}{c} A^\mu u_\mu, \quad (3.82)$$

denn $A^\mu u_\mu = \gamma c\varphi - \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$. Aus der skalaren Wirkung $S = \int L dt = \int (-mc^2 - (q/c)A^\mu u_\mu) d\tau$ gewinnen wir die Mechanik wie gewohnt. Zunächst ist der kanonische Impuls

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \gamma m \mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p}_0 + \frac{q}{c} \mathbf{A}, \quad (3.83)$$

wobei wir \mathbf{p}_0 als den eigentlichen Teilchen-Impuls bezeichnen wollen. Die Hamiltonfunktion ergibt sich aus

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \gamma mc^2 + q\varphi, \quad (3.84)$$

wobei \mathbf{v} in γ noch durch \mathbf{p} ersetzt werden muss. Mit einigen Umformungen finden wir

$$H = q\varphi + \sqrt{m^2 c^4 + (\mathbf{p} - (q/c)\mathbf{A})^2 c^2}. \quad (3.85)$$

Die Bewegungsgleichung kann nun entweder nach der Euler-Lagrange- oder der Hamilton-Methode hergeleitet werden. Die Rechnung ist in beiden Fällen etwas länglich, ihr Resultat aber ist das bekannte Lorentz-Gesetz

$$\frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.86)$$

Mit Hilfe von $dt = \gamma d\tau$ und der Erweiterung auf den 4-Vektor $p_0^\mu = (E_0/c, \mathbf{p}_0)$ finden wir für den Teilchenimpuls die 4-Gleichung

$$\frac{dp_0^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu, \quad (3.87)$$

die nun die kovariante Formulierung der Lorentzkraft darstellt. Für die zeitliche Änderung der kinetischen Energie des Teilchens gilt (mit einiger Rechnung im mittleren Schritt)

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \frac{d(\gamma mc^2)}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.88)$$

Die letzte Gleichung gilt, weil der magnetische Teil der Kraft senkrecht auf der Geschwindigkeit steht. Nur das elektrische Feld verrichtet also Arbeit an dem Teilchen.

Wir sind jetzt in der Lage, die Bewegung geladener Teilchen im elektromagnetischen Feld zu diskutieren. Für ein Teilchen, das von einem konstanten elektrischen Feld beschleunigt wird, haben wir die Aufgabe bereits in Abschnitt 3.2.1 gelöst. Die Bewegung in einem konstanten Magnetfeld ist nicht viel schwieriger. Wir benutzen (3.86) und lassen den Index 0 weg. Wegen $\mathbf{p} = E_{\text{kin}}\mathbf{v}/c^2$ und $\dot{E}_{\text{kin}} = 0$ folgt aus $\dot{\mathbf{p}} = (q/c)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$$\dot{\mathbf{v}} = \omega\mathbf{v} \times \mathbf{B}/B \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{qcB}{E_{\text{kin}}} = \frac{qB}{\gamma mc}, \quad (3.89)$$

wobei B der Betrag des Magnetfelds ist. Sei $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Dann sind die Bewegungsgleichungen für die drei Komponenten der Geschwindigkeit

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0. \quad (3.90)$$

Das beschreibt eine Schraubenbewegung um eine zur z -Achse parallele Achse (nachprüfen!). Die Frequenz ω der (x, y) -Oszillationen wird wegen des Faktors γ im Nenner mit wachsendem v kleiner (Zeitdilatation). Man beachte aber, dass der Betrag von \mathbf{v} bei dieser Bewegung nicht zunimmt, weil das Magnetfeld am Teilchen keine Arbeit verrichtet.

Im allgemeinen Fall ist die Bewegung recht kompliziert, auch wenn (3.87) eine in den Geschwindigkeiten lineare Gleichung ist. Einfach durchzurechnen ist noch der Fall gekreuzter Felder, also etwa $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ und $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Wir benutzen die Bewegungsgleichung in der Form

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{d\tau}. \quad (3.91)$$

Der Feldtensor ist überall 0 außer für $F^{20} = -F^{02} = E$ und $F^{21} = -F^{12} = B$. Wir müssen deshalb die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} &= \frac{q}{mc} E \frac{dx^2}{d\tau} \\ \frac{d^2 x^1}{d\tau^2} &= \frac{q}{mc} B \frac{dx^2}{d\tau} \\ \frac{d^2 x^2}{d\tau^2} &= \frac{q}{mc} \left(E \frac{dx^0}{d\tau} - B \frac{dx^1}{d\tau} \right) \\ \frac{d^2 x^3}{d\tau^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

lösen und wollen das mit ruhender Anfangsbedingung tun, $x^0 = x^1 = x^2 = x^3 = 0$, $u^0 = c$, $u^1 = u^2 = u^3 = 0$. Die Gleichung für x^3 können wir dann

ignorieren. Die andern machen wir erst einmal dimensionslos, indem wir Zeit und Längen geeignet skalieren:

$$\frac{qB}{mc}\tau =: \tilde{\tau}, \quad \frac{qB}{mc}x^0 =: \tilde{x}^0, \quad \frac{qB}{mc}\frac{B}{E}x^{1,2} =: \tilde{x}^{1,2}. \quad (3.93)$$

Wir benutzen dann mit $\tilde{\tau} \rightarrow \tau$ die einfachere Notation

$$\tilde{x}^0 =: t, \quad \tilde{x}^1 =: x, \quad \tilde{x}^2 =: y, \quad \frac{d\tilde{x}^0}{d\tilde{\tau}} =: s, \quad \frac{d\tilde{x}^1}{d\tilde{\tau}} =: u, \quad \frac{d\tilde{x}^2}{d\tilde{\tau}} =: v, \quad (3.94)$$

und schreiben die sechs linearen Gleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\tau} &= w & \frac{du}{d\tau} &= v \\ \frac{dx}{d\tau} &= u & \frac{dv}{d\tau} &= w - u \\ \frac{dy}{d\tau} &= v & \frac{dw}{d\tau} &= b^2v \end{aligned} \quad (3.95)$$

mit $b = E/B$ als einzigem Parameter. Differenzieren wir die Gl. für v noch einmal, so sehen wir mit $\ddot{v} = (b^2 - 1)v$, dass v sich unterschiedlich verhält, je nachdem $b < 1$ (oszillierend) oder $b > 1$ (exponentiell). Wir betrachten deshalb drei Fälle:

1. $E < B$: Wegen $\ddot{v} = -(1 - b^2)v$ und der Anfangsbedingung bei $\tau = 0$ ist $v = A \sin \sqrt{1 - b^2}\tau$. Wegen $\dot{v}_0 = w_0 - u_0 = 1$ ist $A\sqrt{1 - b^2} = 1$. Damit sind $y = u = \int_0^\tau v d\tau$ und $x = \int_0^\tau u d\tau$ elementar integriert:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1 - b^2} \left(\tau - \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \sin \sqrt{1 - b^2} \tau \right) \\ y &= \frac{1}{1 - b^2} \left(1 - \cos \sqrt{1 - b^2} \tau \right) \end{aligned} \quad (3.96)$$

Die Bahn ist eine Zykloide der Höhe $2B^2/(B^2 - E^2)$ und Breite $2\pi(1 - b^2)^{-3/2}$. Das Teilchen driftet mit der mittleren Geschwindigkeit $\langle dx/dt \rangle = \omega/(1 - b^2)$ in x -Richtung, mit ω wie in (3.89), und dieser Drift senkrecht zu \mathbf{E} und \mathbf{B} ist eine ellipsenförmige Bewegung überlagert.

2. $E = B$: Wegen $\ddot{v} = 0$ und der Anfangsbedingungen bei $\tau = 0$ ist $v = \tau$. Daraus folgt durch Integration

$$x = \frac{1}{6}\tau^3, \quad y = \frac{1}{2}\tau^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}(6x)^{2/3}. \quad (3.97)$$

3. $E > B$: Analog zu der Rechnung unter 1. ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{b^2 - 1} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}} \sinh \sqrt{b^2 - 1} \tau - \tau \right) \\ y &= \frac{1}{b^2 - 1} \left(\cosh \sqrt{b^2 - 1} \tau - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Für große Zeiten bewegt sich das Teilchen in Richtung $y/x \rightarrow \sqrt{(E^2 - B^2)/B^2}$.

3.3.3 Die Wirkung des elektromagnetischen Feldes

So wie man die Mechanik aus dem Hamiltonschen Prinzip durch Variation einer Wirkung herleitet, möchte man auch die Grundgleichungen der Elektrodynamik aus einem solchen Prinzip gewinnen. Dabei kann nichts Neues gegenüber den Maxwell-Gleichungen und der Bewegungsgleichung nach Lorentz herauskommen, aber wie aus der Mechanik gewohnt, ergibt sich eine Perspektive für Verallgemeinerungen. Das hat in den Feldtheorien der Quantenmechanik eine wichtige Rolle gespielt.

Zuerst muss man sich klarmachen, welches die unabhängigen Variablen sein sollen, die man variieren kann. In der Mechanik waren es die Bahnen der Teilchen, $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{r}(t) + \delta\mathbf{r}(t)$. In der Elektrodynamik hat man es aber mit Feldern zu tun, man möchte also diese Felder an jedem Ort variieren. Aber welche Felder? Da alles gemäß (3.74) aus den A^μ folgt, sollen die $A^\mu(x)$ die frei variierbaren Größen sein. Dann muss die Wirkung aber ein Integral $\int \mathcal{L} d^4x$ über eine *Lagrange-Dichte* sein, nicht einfach nur ein Integral über die Zeit, und die Lagrange-Dichte muss ein Funktional der Felder A^μ und ihrer Ableitungen sein. Natürlich soll die Wirkung wieder ein Skalar sein. Nach einigem Brüten errät man für die Gesamtwirkung von Feldern und einem geladenen Teilchen, also für die Kombination von Elektrodynamik und Mechanik, die folgende Form:

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{mech}} + S_{\text{ww}} + S_{\text{em}} \\ &= - \int mc^2 d\tau - \int \frac{1}{c^2} j^\mu A_\mu dx^4 - \frac{1}{16\pi c} \int F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} dx^4. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Wir werden das bestätigen, indem wir aus dieser Wirkung durch Variation die Maxwell-Gleichungen herleiten. Zunächst einige Anmerkungen.

Der erste Teil S_{mech} ist uns bereits aus der Mechanik geläufig. Den zweiten Term S_{ww} , der die Wechselwirkung von Mechanik und Elektrodynamik

beschreibt, hatten wir in (3.82) in anderer Form geschrieben:

$$S_{\text{ww}} = - \int \frac{q}{\gamma c} u^\mu A_\mu dt = - \int \frac{q}{c} u^\mu A_\mu d\tau. \quad (3.100)$$

Wir wollen zuerst zeigen, dass die beiden Versionen das Gleiche sind. Dazu überlegen wir, dass ein Teilchen bei $\mathbf{r}(t)$ mit Geschwindigkeit $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ die Stromdichte $j^\mu = qu^\mu \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))$ repräsentiert. Darum ist

$$\begin{aligned} \int \frac{q}{c} u^\mu A_\mu d\tau &= \int \frac{q}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) A_\mu d^3\mathbf{r} d\tau = \\ &= \int \frac{q}{c^2} \frac{dx^\mu}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)) A_\mu d^3\mathbf{r} dt = \int \frac{1}{c^2} j^\mu(x) A_\mu(x) d^4x. \end{aligned} \quad (3.101)$$

(Es wurde $d\tau/d\tau = dt/dt$ benutzt.)

Jetzt können wir darangehen, die Grundgleichungen der Elektrodynamik aus (3.99) zu gewinnen. Das Lorentz-Kraftgesetz haben wir bereits aus $S_{\text{mech}} + S_{\text{ww}}$ gewonnen, indem wir S_{ww} in der Form (3.100) dargestellt und nach der Teilchenbahn variiert haben. Nun wollen wir die Felder variieren und benutzen deshalb die andere Form, in der die Wechselwirkung mit Hilfe der A^μ dargestellt ist. Wir finden für $\delta(S_{\text{ww}} + S_{\text{em}})$

$$\begin{aligned} & - \int \left(\frac{1}{c^2} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi c} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \right) d^4x = \\ & - \frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \delta (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right) d^4x = \\ & - \frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu \right) d^4x = \\ & - \frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \partial_\nu \delta A_\mu \right) d^4x. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Im letzten Schritt haben wir im mittleren Term μ mit ν vertauscht und ausgenutzt, dass $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$ ist. Im letzten Term machen wir nun wie üblich eine partielle Integration und lassen den Oberflächenterm weg: es handelt sich um die 3D-Oberfläche des 4D-Integrationsgebiets; auf ihren zeitlichen Rändern wird gefordert $\delta A_\mu = 0$, und der räumliche Rand so so weit außen liegen, dass die Felder dort bereits abgeklungen sind. Dann haben wir (unter nochmaligem Ausnutzen von $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$)

$$\delta(S_{\text{ww}} + S_{\text{em}}) = -\frac{1}{c} \int \left(\frac{1}{c} j^\mu - \frac{1}{4\pi} \partial_\nu F^{\nu\mu} \right) \delta A_\mu d^4x, \quad (3.103)$$

und da das für beliebige $\delta A_\mu(x)$ gelten soll, muss bereits der Integrand verschwinden:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (3.104)$$

wie in (3.68).

Wenn wir die Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes, so wie in (3.99) gegeben, durch die Felder selbst ausdrücken, finden wir

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{16\pi c} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2}{8\pi}. \quad (3.105)$$

Das ist zu unterscheiden von der Energiedichte, die wir bereits aus dem Grundkurs über Elektrodynamik kennengelernt haben:

$$u = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{8\pi}. \quad (3.106)$$

Für diese hatten wir ebenfalls im Grundkurs schon eine Bilanzgleichung kennengelernt, die sich durch Einsetzen der inhomogenen Maxwell-Gln. in die zeitliche Ableitung ergibt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.107)$$

wobei

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (3.108)$$

der Poynting-Vektor ist. Diese Bilanzgleichung lässt sich lesen als

$$\partial_\mu T^\mu = -\frac{1}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad T^\mu = (u, \mathbf{S}/c), \quad (3.109)$$

wobei die linke Seite die Form der Divergenz eines Vektors T^μ hat. Wäre die rechte Seite Null, dann hätten wir eine Erhaltungsgleichung für den Vektor der Energie-Impuls-Dichte; es wären also u und \mathbf{S} für sich konstant. Das ist tatsächlich so, wenn keine Ladungen im Spiel sind. Mit Ladungen aber haben wir eine rechte Seite, die kein 4-Skalar ist. Darum kann diese Bilanzgleichung nicht der „wahre Jakob“ sein. Wir diskutieren im nächsten Abschnitt, dass man einen Tensor einführen muss, für den dann eine allgemeine Bilanzgleichung gilt.

3.3.4 Der Energie-Impuls-Tensor

Ausgehend von einer Lagrange-Funktion oder Lagrange-Dichte kann man auf kanonische Weise Erhaltungsgrößen herleiten, indem man in verallgemeinerter Form nach dem Muster $H = \dot{\mathbf{r}} \cdot (\partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}) - L \Rightarrow dH/dt = 0$ verfährt. Wenn wir zunächst nur die Wirkung

$$S_{\text{em}} = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} d^4x \quad (3.110)$$

betrachten mit

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad (3.111)$$

dann ist die Variation der Lagrangedichte nach den A^μ

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= -\frac{1}{8\pi} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \delta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{8\pi} F^{\mu\nu} (\delta(\partial_\mu A_\nu) - \delta(\partial_\nu A_\mu)) = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu A_\nu), \end{aligned} \quad (3.112)$$

wobei wieder im letzten Term μ mit ν vertauscht und die Asymmetrie von $F^{\mu\nu}$ ausgenutzt wurde. Damit sind dann die verallgemeinerten kanonischen Impulsdichten

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu}, \quad (3.113)$$

und als kovariant geschriebene Erhaltungsgröße (analog zur H -Funktion der Mechanik) hat man dann

$$T^{\mu\nu} = (\partial^\nu A_\rho) \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\rho)} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = -\frac{1}{4\pi} (\partial^\nu A_\rho) F^{\mu\rho} + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (3.114)$$

Es gehört noch einige Rechnung dazu, die Eigenschaft $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ nachzuweisen. Dafür sei auf Jackson oder Landau-Lifshitz verwiesen. Nachdem dies etabliert ist, kann man diese Gleichung für festes ν über den ganzen 3D-Raum integrieren und erhält unter der Annahme, dass die Felder weit draußen rasch genug abfallen, die Erhaltungsgleichungen

$$\int T^{0\mu} d^3x = \text{const} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3); \quad (3.115)$$

denn der räumliche Teil des Integrals über die 4-Divergenz lässt sich in ein verschwindendes Oberflächenintegral verwandeln. Bevor wir das interpretieren, muss aber noch gesagt werden, dass die so definierten 4-Impulse $\int T^{0\mu} d^3x$

den Tensor $T^{\mu\nu}$ nicht eindeutig bestimmen. Man kann ihn eindeutig machen, indem man fordert, dass er symmetrisch und eichinvariant mit Spur $T^\mu{}_\mu = 0$ sei. Das ist bei (3.114) noch nicht der Fall. Deshalb muss man geeignete Terme addieren, die die Impulse (3.115) nicht ändern. Auch dafür sei auf die Literatur verwiesen. Am Ende hat man den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes mit allen gewünschten Eigenschaften:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} g^{\mu\rho} F_{\rho\sigma} F^{\sigma\nu} + \frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (3.116)$$

Ausgedrückt durch die Felder bedeutet das

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) \\ T^{i0} &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ T^{ij} &= \frac{-1}{4\pi} (E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)) \end{aligned} \quad (3.117)$$

Dabei laufen die Indizes i, j von 1 bis 3. Die nullte Spalte des Tensors $T^{\mu\nu}$ ist die Energie-Impuls-Dichte, die Spalten eins bis drei geben die entsprechenden Stromdichten wieder. Die Energiestromdichte ist dabei identisch mit der Impulsdichte. Den räumlichen Teil T^{ij} des Tensors nennt man auch den *Maxwellschen Spannungstensor*.

So weit das elektromagnetische Feld alleine. Wenn keine Ladungen vorhanden sind, dann ist also der Gesamt-4-Impuls $\int T^{0\mu} d^3x$ gemäß (3.115) eine Erhaltungsgröße. Wenn aber Ladungen und die dazugehörigen Stromdichten vorhanden, gibt es einen Austausch von Energie und Impuls, und die Bilanzgleichung muss modifiziert werden.

Als nächstes betrachten wir ein einzelnes freies mechanisches Teilchen der Masse m (bei mehreren ist einfach die Summe zu nehmen) und suchen dessen Energie-Impuls-Tensor in kovarianter Form. Massendichte und Stromdichte sind

$$\begin{aligned} \rho_m(ct, \mathbf{x}) &= m\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)), \\ \mathbf{j}_m &= \rho_m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \rho_m \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{\rho_m}{\gamma} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}, \end{aligned} \quad (3.118)$$

woraus sich die 4-Stromdichte zu

$$j_m^\mu = (c\rho_m, \mathbf{j}_m) = \frac{\rho_m(ct, \mathbf{x})}{\gamma} (\gamma c, \mathbf{u}) = \frac{\rho_m(ct, \mathbf{x})}{\gamma} u^\mu \quad (3.119)$$

ergibt. Die zugehörige Invariante (wir lassen der Einfachheit halber den Index m weg) ist $j^\mu j_\mu = (\rho/\gamma)^2 u^\mu u_\mu = (c\rho/\gamma)^2$; es muss also ρ proportional zu γ sein, was man als Konsequenz von Lorentz-Kontraktion und Massenerhaltung ansehen kann. Die rein mechanische Wirkung S_{mech} mit Hilfe von $m = \int \rho d^3 \mathbf{x}$ durch die Massendichte darstellen,

$$S_{\text{mech}} = -c^2 \int \rho d^3 \mathbf{x} d\tau = -c \int \frac{\rho}{\gamma} d^4 x, \quad (3.120)$$

dann erkennen wir, dass $\mathcal{L}_m = -c\rho/\gamma$ die Lagrange-Dichte ist. Hieraus kann man mit denselben Methoden wie oben (nur einfacher) den Energie-Impuls-Tensor des Teilchens bestimmen:

$$T_{\text{mech}}^{\mu\nu} = \frac{\rho_m(x)}{\gamma} u^\mu u^\nu = \rho_m(x) u^\mu \frac{dx^\nu}{dt} = \gamma \rho_m(x) c^2 \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\beta}^t \\ \boldsymbol{\beta} & \beta_i \beta_j \end{pmatrix}. \quad (3.121)$$

Berechnet man die 4-Divergenz dieses Tensors, so findet man

$$\begin{aligned} \partial_\nu T_{\text{mech}}^{\mu\nu} &= u^\mu \partial_\nu \left(\rho_m \frac{dx^\nu}{dt} \right) + \rho_m \frac{dx^\nu}{dt} \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} \\ &= u^\mu \partial_\nu j_m^\nu + \rho_m \frac{du^\mu}{dt} = \rho_m \frac{du^\mu}{dt}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Im vorletzten Schritt haben wir die Massenerhaltung $\partial_\nu j_m^\nu = 0$ ausgenutzt. Wenn nun keine Kräfte wirken, ist die rechte Seite Null und wir haben die Erhaltungsgleichung für den Vektor des 4-Impulses.

Wenn aber nun Feld und Teilchen wechselwirken, dann müssen wir in der Wirkung auch den Term S_{ww} berücksichtigen. Wir wissen schon, dass er bei der Variation nach der Bahn der Teilchen auf die Lorentzkraft führt. Das setzen wir in die rechte Seite von (3.122) ein und erhalten

$$\partial_\nu T_{\text{mech}}^{\mu\nu} = \frac{\rho_m}{\gamma} \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{\rho_m}{\gamma} \frac{q}{mc} F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{\rho}{\gamma c} F^{\mu\nu} u_\nu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu. \quad (3.123)$$

(Wir haben ausgenutzt, dass $\rho_m/m = \rho/q$, wobei ρ die elektrische Ladungsdichte ist.) Die rechte Seite beschreibt die Energie-Impuls-Aufnahme aus dem elektromagnetischen Feld. Berücksichtigen wir den Term S_{ww} in der Gesamtwirkung auch bei der Variation nach den Feldern A^μ , dann stellt sich heraus, dass für die Divergenz des Feldtensors (3.116) gilt

$$\partial_\nu T_{\text{em}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu. \quad (3.124)$$

(Man zeigt das wohl am einfachsten durch direkte Berechnung der 4-Divergenz und Einsetzen der Maxwell-Gln.) Die Kombination der beiden Gln. (3.123) und (3.124) gibt

$$\partial_\nu(T_{\text{mech}}^{\mu\nu} + T_{\text{em}}^{\mu\nu}) = 0, \quad (3.125)$$

das heißt: die Summe der 4-Impulse von Teilchen und Feld ist konstant. Hiermit ist die Vereinigung von Mechanik und Elektrodynamik vollständig gelungen.

Leider musste Einstein feststellen, dass Gravitationskräfte sich nicht in diesen Formalismus einbauen lassen. Dazu entwickelte er die allgemeine Relativitätstheorie (ART), in der die Gravitation sehr eng mit der Metrik der Raumzeit verknüpft ist. Sie ist nicht mehr das Minkowskische $g_{\mu\nu}$, sondern kann sich von Ort zu Ort ändern, besonders in der Nähe von Massen. Nach langem Tüfteln fand Einstein 1915 die Grundgleichung der ART,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.126)$$

Hier ist $g_{\mu\nu}(x)$ die gesuchte Metrik, $T_{\mu\nu}(x)$ der Energie-Impuls-Tensor der gesamten Materie am Ort x . $R_{\mu\nu}$ ist der Ricci-Tensor, also eine zweite Ableitung der $g_{\mu\nu}$, in der diese nicht-linear vorkommen. R ist der Krümmungsskalar $R^\mu{}_\mu$, und Λ ist eine sog. kosmologische Konstante, ohne die man wohl nicht die beschleunigte Expansion des Kosmos verstehen kann. Da man ihre Natur aber ohnehin nicht versteht, identifiziert man sie mit einer „dunklen Energie“. Die Natur der Gleichungen ist im Prinzip ähnlich wie die der Maxwell-Gln.: man hat eine partielle DGl. zweiter Ordnung mit Quellterm, nur ist eben (leider) die Gleichung nicht-linear. Für eine Punktmasse im ansonsten leeren Universum ist die Lösung die Schwarzschild-Metrik, eine Variation des Newtonschen Gravitationsgesetzes, mit der man die Perihel-Drehung des Merkur und andere beobachtbare Effekte exzellent erklären kann. (Die Bewegung der Planeten folgt Geodäten in dieser Metrik.)

3.3.5 Wellen und Strahlung

Die Grundaufgabe der Elektrodynamik ist die simultane Lösung der Gleichungen (3.78) für die Felder und (3.87) für die geladenen Teilchen. Den Zusammenhang liefert der Ausdruck (3.119) für die Stromdichte. Insgesamt also bei N Teilchen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_i \frac{du_i^\mu}{d\tau} &= \frac{q_i}{c} F^{\mu\nu} u_{i\nu}, \\ \square A^\mu &= \frac{4\pi}{c} j^\mu \end{aligned} \quad (3.127)$$

für die Bewegung $\mathbf{x}_i(t)$ der Teilchen i und die Raumzeit-Entwicklung der Felder A^μ , wobei noch gilt

$$j^\mu(x) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{\gamma_i} u_i^\mu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)), \quad (3.128)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Im Allgemeinen (z. B. in der Plasmaphysik) ist das ein hochkompliziertes System gekoppelter Gleichungen, das man nur näherungsweise oder numerisch lösen kann. Meist beschränkt man sich darauf, bei gegebenen Feldern die Teilchenbahnen zu berechnen (wie in Abschnitt 3.3.2) oder bei gegebener Bewegung der Teilchen die von ihnen abgestrahlten Felder. Das soll im Folgenden noch andeutungsweise gemacht werden.

Wir nehmen also Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ an und suchen die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad (3.129)$$

im unendlich ausgedehnten Raum, wobei die Stromdichte j^μ als gegeben angesehen werde.

Es reicht hier aus, wenn ich nur in Stichworten angebe, was in der Vorlesung am 12. 12. dazu gesagt wurde, denn man kann es nachlesen in Abschnitt 12.11 des Buches von Jackson.

Die Lösung erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird als Quelle $\delta^4(x - x')$ genommen, also ein Teilchen, das für einen Moment $t = t'$ am Ort $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ erscheint und wieder verschwindet. Die zugehörige Lösung heißt Greensche Funktion und ist mit der Methode der Fourier-Transformation leicht zu finden. Zu beachten ist lediglich, dass wegen der Zeitumkehr-Symmetrie der Gleichungen kausale und anti-kausale (retardierte und avancierte) Lösungen existieren und man aus physikalischen Gründen die kausale (retardierte) auswählen muss. Sie lautet

$$D_r(x - x') = \frac{\theta(x_0 - x'_0)}{4\pi R} \delta(x_0 - x'_0 - R) \quad \text{mit } R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \quad (3.130)$$

Man kann auch schreiben

$$D_r(x - x') = \frac{1}{2\pi} \theta(x_0 - x'_0) \delta((x - x')^\mu (x - x')_\mu). \quad (3.131)$$

Dies zeigt, dass D_r nur auf dem Vorwärts-Lichtkegel existiert.

Im zweiten Schritt wird wie üblich die Linearität der Wellengleichung ausgenutzt und das Superpositionsprinzip verwendet. Die allgemeine Lösung ist also

$$A^\mu(x) = A_{in}^\mu + \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D_r(x-x') j^\mu(x)', \quad (3.132)$$

wobei A_{in}^μ (die „einlaufende“) eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung sein kann.

Zur Abstrahlung bewegter Ladungen kann ich mich ebenfalls kurz fassen und auf das Kapitel 14 von Jackson verweisen. Im Fall einer Punktladung (und ohne einlaufendes Feld) gibt die Auswertung von (3.132) das Liénard-Wiechert-Potential

$$A^\mu(x) = \frac{qu^\mu(\tau)}{u^\nu(x-x(\tau))_\nu} \Big|_{\tau=\tau_0}, \quad (3.133)$$

wobei τ_0 durch die Lichtkegel-Bedingung $(x-x(\tau_0))^\nu (x-x(\tau_0))_\nu = 0$ definiert ist; es tragen zum Feld bei x nur solche Quellen bei, die auf dem Rückwärts-Lichtkegel von x liegen. Dasselbe lässt sich schreiben

$$\varphi(x) = \frac{q}{(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \Big|_{\text{ret}}, \quad \mathbf{A}(x) = \frac{q\boldsymbol{\beta}}{(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R} \Big|_{\text{ret}}, \quad (3.134)$$

wobei \mathbf{n} der Einheitsvektor in Richtung $\mathbf{x} - \mathbf{x}(\tau)$ ist und $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{u}(\tau)/c$. Der Index ret meint, dass der Ausdruck in der Klammer für die Zeit τ_0 auszuwerten ist, bei der die Lichtkegel-Bedingung zutrifft.

Mit diesem allgemeinen Ergebnis für das Potential A^μ kann man nun die Felder ausrechnen, die von der bewegten Ladung ausgestrahlt werden. Man findet schließlich für das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(x) = \frac{q(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R^2} \Big|_{\text{ret}} + \frac{q\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{c(1-\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \Big|_{\text{ret}} \quad (3.135)$$

und für das magnetische $\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\text{ret}}$. Damit kann man nun verschiedene Situationen beschreiben. Wenn die Ladung sich gleichförmig bewegt, $\dot{\boldsymbol{\beta}} = 0$, dann gibt es nur den ersten Term: das ist das statische Feld einer Ladung, beobachtet aus einem relativ dazu bewegten System. Das hatten wir in der Vorlesung diskutiert (Lorentz-Kontraktion in Bewegungsrichtung). Dieses Feld fällt $\propto 1/R^2$ ab. Beschleunigte Ladungen strahlen $\propto 1/R$, aber mit Bevorzugung bestimmter Richtungen. Wenn $v \ll c$, dann erhält man das Resultat aus der Vorlesung zur Elektrodynamik, $\mathbf{E} \approx (q/c)\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})/R|_{\text{ret}}$,

mit Poynting-Vektor $\mathbf{S} = (c/4\pi)|\mathbf{E}|^2\mathbf{n}$ und abgestrahlter Leistung

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}|R\mathbf{E}|^2 = \frac{q^2}{4\pi c^3}|\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2 \theta, \quad (3.136)$$

wobei θ der Winkel zwischen \mathbf{n} und $\dot{\mathbf{v}}$ ist. Nach Integration über alle Winkel erhält man $P = (2q^2/3c^3)|\dot{\mathbf{v}}|^2$ als insgesamt abgestrahlte Leistung. Man kann dies in kovarianter Form wie folgt schreiben (Liénard 1898)

$$P = \frac{2q^2}{3c}\gamma^6(\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2). \quad (3.137)$$

Wenn nicht mehr $|\boldsymbol{\beta}| \ll 1$, dann wird die Sache komplizierter. Es kommt auf die relative Richtung von $\boldsymbol{\beta}$ und $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ an und auf die von $\boldsymbol{\beta}$ relativ zum Beobachtersystem. Zum Beispiel gilt für den Fall, dass $\boldsymbol{\beta}$ und $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ beide die gleiche Richtung haben, mit Winkel θ relativ zu \mathbf{n} ,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}|\dot{\mathbf{v}}|^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}, \quad (3.138)$$

was für $\beta \ll 1$ gegen das klassische Ergebnis strebt, bei großem β aber eine deutliche Neigung nach vorne bekommt, wobei der Winkel maximaler Abstrahlung

$$\theta_{\max} = \arccos \frac{\sqrt{1 + 15\beta^2} - 1}{3\beta} \rightarrow \frac{1}{2\gamma}, \quad (3.139)$$

letzteres im Limes $\beta \rightarrow 1$. Diesen Trend zur Vorwärtsrichtung der Abstrahlung findet man auch bei der Synchrotronstrahlung (in irdischen Beschleunigern, z. B. in Hamburg, oder im Kosmos). Mehr über die Details bei Jackson.

4 Randwertprobleme: Greensche Funktionen

In diesem Kapitel habe ich mich sehr explizit an die Abschnitte 2 und 3 aus dem Buch von Jackson gehalten, ich brauche das hier nicht darzustellen. Das Problem ist die Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

in einem dreidimensionalen Gebiet V mit gegebenem Rand ∂V und Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen, mit einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ im Innern von V . Wegen der Linearität der Gleichung kann man das Problem zurückführen auf das Problem mit einer Punktquelle $\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ und entsprechenden Randbedingungen:

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (4.2)$$

Hierfür gibt es zunächst in einigen Fällen spezielle Methoden wie die geeigneter Spiegelladung außerhalb von V . Hat man die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ gefunden, dann liefert der Greensche Satz in der Form

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \rho(\mathbf{r}')G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')d^3\mathbf{r}' + \oint_{\partial V} \frac{d^2\mathbf{r}'}{4\pi} \cdot (G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\nabla'\varphi(\mathbf{r}') - \varphi(\mathbf{r}')\nabla'G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \quad (4.3)$$

die Lösung von (4.1).

Das Auffinden von $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ist im Allgemeinen nicht explizit möglich. Es gelingt nur, wenn der Rand so beschaffen ist, dass eine Separation des Problems in ein-dimensionale Unterprobleme möglich ist. Dazu muss ∂V eine Koordinatenfläche aus einem gewissen (nicht sehr großen) Satz von Koordinaten sein, z. B. kartesischen, sphärischen, Zylinder- oder elliptischen Koordinaten. Wenn das der Fall ist, kann man als Basisfunktionen in V die Eigenfunktionen des entsprechenden Laplace-Operators nehmen (also die Gleichung (4.1) mit $\rho \equiv 0$) und $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ nach dieser Basis entwickeln. Das haben wir für Quader und für Probleme mit Kugelsymmetrie durchgeführt. Bei letzteren wird man bzgl. der Winkel auf die Kugelfunktionen geführt und bzgl. der radialen Koordinate auf eine einfache Dgl. Es wurde noch erwähnt, dass man bei Problemen mit Zylinder-Symmetrie auf Besselfunktionen stößt.

5 Statistische Physik

In diesem Kapitel, das einige Defizite aus der entsprechenden Vorlesung im Bachelor-Kurs aufarbeiten sollte, hielt ich mich eng an das Buch von Schwabl, so dass auch hier keine ausführliche Wiedergabe vonnöten ist. Ich begann mit einem Rückblick auf die Thermodynamik: extensive und intensive Variablen in Paaren, die jeweils unter dem Gesichtspunkt von thermodynamischen Potentialen wie Entropie, innere Energie, freie Energie, freie (oder Gibbs'sche) Enthalpie zueinander konjugiert sind. Diese Konjugation ist definiert durch die jeweiligen „thermodynamischen Identitäten“ der Potentiale, also differentieller Identitäten wie

$$dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dV - \frac{\mu}{T}dN \quad \Rightarrow \quad S = S(E, V, N) \quad (5.1)$$

oder

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN \quad \Rightarrow \quad G = G(T, p, N) = E - TS + pV. \quad (5.2)$$

Bei homogenen Systemen gilt die Gibbs-Duhem-Relation $G = \mu N$ oder differentiell

$$Nd\mu = -SdT + Vdp \quad \Rightarrow \quad \mu = \mu(T, p). \quad (5.3)$$

In der letzten Gleichung kann man noch die Dichten $S/N =: s$ und $V/N =: v$ als auf die Teilchenzahl (als „Extensivitätsparameter“) bezogene extensive Variablen einführen. Neben den extensiven und intensiven Variablen und den Potentialen als ihren Integralen spielen die „Suszeptibilitäten“ als ihre Ableitungen eine wichtige Rolle, denn auf dieser Ebene spielen sich die meisten Experimente ab. Z. B. misst man spezifische Wärmen $C = T\partial S/\partial T|_{\cdot}$, wobei mit dem Punkt Druck oder Volumen gemeint sind etc.

Es gelten dann vier *Hauptsätze*:

- nullter Hauptsatz: nach hinreichend langer Zeit stellt sich ein Gleichgewicht ein, das durch eine Temperatur T charakterisierbar ist
- erster Hauptsatz: die Energie ist eine Erhaltungsgröße und somit eine Zustandsvariable (anders als die Prozessvariablen Arbeit oder Wärme)
- zweiter Hauptsatz: über reversible Vorgänge (Carnot-Zyklen) lässt sich die Entropie ebenfalls als Zustandsvariable definieren; sie kann aber bei irreversiblen Vorgängen spontan zunehmen
- dritter Hauptsatz: am absoluten Nullpunkt der Temperatur ist die Entropie Null; damit verschwinden auch alle spezifischen Wärmen

Insbesondere der nullte Hauptsatz legt fest, dass man es eigentlich nur mit Gleichgewichten zu tun hat. Eine gewisse Verallgemeinerung stellen Transport-Prozesse dar, bei denen man es noch mit *lokalen Gleichgewichten* zu tun hat – wie etwa im Kapitel über Hydrodynamik schon benutzt. Noch allgemeinere Nichtgleichgewichts-Prozesse verlangen eine andere Beschreibung (Theorie stochastischer Prozesse; Master-Gleichung; Langevin-Gleichung; Fokker-Planck-Gleichung).

5.1 Grundlage der Statistik

Die statistische Physik hat keine fundamentale Konstante wie die Mechanik mit G , die Elektrodynamik mit c und die Quantenmechanik mit \hbar . Ihre Aufgabe ist die Herleitung der Gleichgewichts-Thermodynamik aus einer jeweils geeigneten statistischen Verteilung der Mikrozustände. Wichtig ist also zunächst die Identifikation der Mikrozustände eines Systems. Das war erst nach Entwicklung der Quantentheorie befriedigend möglich. Als Grundprinzip gilt das Boltzmann-Prinzip, wonach bei gegebener Temperatur die Mikrozustände zur Energie E mit dem Boltzmann-Faktor zu gewichten sind:

$$w \propto e^{-\beta E}, \quad \beta = \frac{1}{k_{\text{B}}T}. \quad (5.4)$$

(Die Boltzmann-Konstante ist keine fundamentale Konstante, sondern legt nur die Skala der T -Messung fest.)

Im Rahmen der Quantenmechanik beschreibt man N -Teilchen-Systeme durch einen Hamiltonoperator \hat{H} , der auf die Zustände des Systems wirkt. Diese werden in der Regel als Eigenzustände von \hat{H} angenommen, so dass

$$\hat{H}|\psi\rangle_n = E_n|\psi\rangle_n \quad (5.5)$$

gilt. Das Boltzmann-Prinzip lässt sich dann (kanonisch) so formulieren, dass die Wahrscheinlichkeits-Verteilung für die Zustände $|\psi\rangle_n \equiv |n\rangle$ eines Systems von N Teilchen gegeben ist durch den *statistischen Operator*

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z_N} \sum_n |n\rangle e^{-\beta \hat{H}} \langle n| = \frac{1}{Z_N} \sum_n |n\rangle e^{-\beta E_n} \langle n|, \quad (5.6)$$

wobei die *Zustandssumme* Z_N gegeben ist als Summe über alle Zustände,

$$Z_N = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{Sp } e^{-\beta \hat{H}}. \quad (5.7)$$

Mittelwerte der Messung einer Observablen \hat{A} sind dann

$$\langle A \rangle = \text{Sp } \hat{\rho} \hat{A} = \frac{1}{Z_N} \sum_n A_n e^{-\beta E_n}, \quad (5.8)$$

letzteres mit $\hat{A}|n\rangle = A_n|n\rangle$. Insbesondere ergibt sich für den Mittelwert der Energie, die innere Energie,

$$U = \langle H \rangle = \text{Sp } \hat{\rho} \hat{H} = \frac{1}{Z_N} \sum_n E_n e^{-\beta E_n} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log \text{Sp } e^{-\beta \hat{H}}. \quad (5.9)$$

Dies legt es nahe, die freie Energie F zu identifizieren mit

$$F = -k_{\text{B}} T \log \text{Sp } e^{-\beta \hat{H}} = -k_{\text{B}} T \log Z_N, \quad (5.10)$$

denn dann gilt

$$U = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F) = F - T \frac{\partial F}{\partial T} = F + TS \quad (5.11)$$

wie in der Thermodynamik. Dieser kanonische Formalismus gilt bei fest vorgegebenen N und V .

Eine Variation dieses Formalismus ist der großkanonische, der sich anbietet, wenn die Teilchenzahl nicht fest ist, sondern durch eine „chemische“ Wechselwirkung mit der Umgebung reguliert wird. Dann führt man in Analogie zur Temperatur das *chemische Potential* μ ein und benutzt den großkanonischen statistischen Operator

$$\hat{\rho}_{GC} = \frac{1}{Z_{GC}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} \quad (5.12)$$

mit der großkanonischen Zustandssumme

$$Z_{GC}(T, V, \mu) = \text{Sp } e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta \mu N} Z_N(T, V). \quad (5.13)$$

Diese beiden „Gesamtheiten“ erweisen sich im *thermodynamischen Limes* $N, V \rightarrow \infty$ als äquivalent (und auch als äquivalent zur mikrokanonischen Gesamtheit, in der die Energie fest vorgegeben ist und alle damit kompatiblen Mikrozustände gleich gewichtet werden).

Im Rahmen der Quantenmechanik identischer Teilchen gilt das Spin-Statistik-Theorem, wonach die Gesamt-Wellenfunktion bei Teilchen mit ganzzahligem Spin symmetrisch gegenüber Vertauschung irgend zweier Teilchen ist (Bose-Statistik), bei Teilchen mit halbzahligem Spin ist sie antisymmetrisch (Fermi-Statistik). Das ist eine tiefliegende und etwas mysteriöse Tatsache, die wir so hinnehmen müssen. Entsprechend sind die Statistiken der Zustände sehr verschieden. Wir behandeln sie deshalb getrennt. In allen Fällen aber nehmen wir an, dass wir es mit *idealen Gasen* zu tun haben, was heißen soll: mit nicht wechselwirkenden Teilchen, so dass wir die Mikrozustände aus symmetrisierten bzw. antisymmetrisierten Produktzuständen der einzelnen Teilchen zusammensetzen können.

5.2 Bose-Statistik

5.2.1 Photonen und Phononen

Die einfachsten Bosonen sind Teilchen mit Spin $s = 0$ und Masse $m = 0$, das sind Photonen und Phononen in Festkörpern. Entsprechend haben wir ausführlich die Statistik bzw. Thermodynamik von Photonen- und Phonongasen diskutiert. Sie haben vieles gemeinsam, besonders bei tiefen Temperaturen, wo die innere Energie $\propto T^4$ ist (Stefan-Boltzmann-Gesetz) und die spezifische Wärme $\propto T^3$. Bei hohen Temperaturen unterscheiden sie sich wegen der unterschiedlichen Spektren bzw. Zustandsdichten. Bei Photonen gilt das Tieftemperatur-Verhalten bis zu beliebig hohen Temperaturen, da Photonen beliebig kurzer Wellenlänge spontan erzeugt werden können. Bei Phononen ist das nicht der Fall, da die Wellenzahlen auf die Brillouin-Zone beschränkt sind. Deswegen ist das Hochtemperatur-Verhalten durch das nicht wechselwirkender Oszillatoren bestimmt, für das die innere Energie $U = 3Nk_{\text{B}}T$ bzw. die spezifische Wärme $C_V = 3Nk_{\text{B}}$ ist (Dulong-Petit). Im Bereich dazwischen stellt das Debye-Modell eine akzeptable Interpolation her. Soweit bei Phononen nur die harmonischen Gitterschwingungen und sonst nichts berücksichtigt werden, ist bei ihnen wie generell bei den Photonen das chemische Potential $\mu = 0$, so dass kanonische und großkanonische Gesamtheit identisch sind. Ein wichtiges allgemeines Gesetz betrifft noch die mittlere Zahl von Anregungen mit Energie ε :

$$\langle n(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}. \quad (5.14)$$

Hieraus ergibt sich bei Photonen mit $\varepsilon = \hbar k c \hbar \omega$ und der Zustandsdichte

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{\pi^2} \frac{\varepsilon^2}{(\hbar c)^3} \Theta(\varepsilon) \quad (5.15)$$

die berühmte Plancksche Strahlungsformel für die spektrale Energiedichte als Funktion von Frequenz und Temperatur

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}. \quad (5.16)$$

Bei Phononen ist das alles weniger schön. Außerdem muss man für eine realistische Beschreibung, bei der z. B. thermische Ausdehnung, Wärmeleitung etc. möglich werden, Anharmonizitäten der Wechselwirkung zwischen den Atomen in Rechnung stellen. Diese implizieren eine Abhängigkeit der Frequenzen vom Volumen des Festkörpers. Hier wurde kurz das Modell von Grüneisen diskutiert.

5.2.2 Bosonen mit Masse

Wenn Bosonen eine Masse haben und ein Dispersionsgesetz $\varepsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$, dann sieht die Statistik ganz anders aus. Die erste Frage ist, was ein N -Teilchen-Mikrozustand ist. Quantenmechanische „freie Teilchen“ sind Lösungen der Schrödinger-Gleichung in dem gegebenen Volumen (das ein rechteckiger Kasten oder – für einfachere Rechnung – ein dreidimensionaler Torus sein soll). Also wird man die Zustände als Produkten von ebenen Wellen auffassen, die aber noch symmetrisiert werden müssen. Am einfachsten macht man das im Formalismus der zweiten Quantisierung, bei der man die Symmetrieeigenschaften durch die Vertauschungsregeln der Erzeuger und Vernichter von 1-Teilchen-Zuständen sicherstellt und im Übrigen den Hamiltonoperator in der Teilchenzahl-Darstellung benutzt:

$$\hat{H} = \sum_k \hat{n}_k \varepsilon_k, \quad (5.17)$$

wobei hier $k = (\mathbf{k}, s)$ gemeint ist: \mathbf{k} als Wellenvektor des 1-Teilchen-Zustands und s als Spinquantenzahl (die wir im Folgenden ignorieren, weil wir Teilchen mit $s = 0$ betrachten werden). Ein Mikrozustand in dieser Darstellung ist einfach durch die Angabe der Besetzungszahlen $\{n_k\}$ für alle k gegeben, die entsprechende Energie

$$E(\{n_k\}) = \sum_k n_k \varepsilon_k. \quad (5.18)$$

Kanonische Statistik hiermit zu machen ist mühselig bis unmöglich, weil die Bedingung $\sum_k n_k = N$ schwer zu berücksichtigen ist. Aber in der großkanonischen Statistik kann man jedes n_k unabhängig von den anderen alle Werte von 0 bis ∞ annehmen lassen. Dann ist die großkanonische Zustandssumme

$$Z_{GC} = \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}}, \quad (5.19)$$

und hieraus ergibt sich das großkanonische Potential

$$\Phi = -pV = k_{\text{B}}T \sum_k \log(1 - e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}). \quad (5.20)$$

Aus der thermodynamischen Identität dieses Potentials folgt

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} - 1} = \sum_k \langle n_k \rangle. \quad (5.21)$$

Man erkennt eine Bedingung: damit $\langle n_k \rangle$ immer positiv bleibe, muss $\mu < \varepsilon_0 = 0$ sein. Da sich andererseits zeigen wird, dass bei hinreichend tiefen

Temperaturen $\mu = 0$ nicht vermeidbar ist, liegt hier ein Problem: man muss den Grundzustand $\varepsilon_k = 0$ gesondert betrachten.

Tun wir das zunächst nicht und wandeln die Summe über k nach den üblichen Vorschriften in ein Integral über die Energie um, mit Zustandsdichte

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{\varepsilon} \Theta(\varepsilon), \quad (5.22)$$

dann erhalten wir für die Teilchendichte

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^{x/z} - 1} dx =: \frac{1}{\lambda^3} g_{3/2}(z), \quad (5.23)$$

wobei λ die thermische Wellenlänge ist,

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T}}, \quad (5.24)$$

und $z := e^{\beta\mu}$ die sog. „Fugazität“ ist und $g_{3/2}(z)$ eine Funktion, die im Wesentlichen als Lerch-Funktion bekannt ist. Genauer und allgemeiner: es gilt

$$g_\nu(z) = z\Phi(z, \nu, 1) = \frac{z}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1}}{e^x - z} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^\nu}. \quad (5.25)$$

$\Phi(z, \nu, 1)$ ist ein Spezialfall der Lerch-Funktion, die ihrerseits eine spezielle hypergeometrische Funktion ist mit logarithmischer Singularität bei $z = 1$, so dass man $z < 1$ fordern muss. Bei $z = 1$ ist $\Phi(1, \nu, 1) = \zeta(\nu)$ mit der Riemannschen ζ -Funktion. Es bedeutet aber $z = 1$, dass $\mu = 0$ ist. Wenn also

$$n\lambda^3 = g_{3/2}(1) = \zeta(3/2) = 2.612, \quad (5.26)$$

dann ist $\mu = 0$. Das passiert, wenn $n/T^{3/2}$ einen bestimmten Wert erreicht. Wenn die Dichte n gegeben ist, also bei der kritischen Temperatur

$$k_B T_c(n) = \frac{2\pi\hbar^2}{2.612^{2/3} m} n^{2/3}. \quad (5.27)$$

Wenn das Produkt $n\lambda^3$ größer ist als 2.612, dann muss man also den Grundzustand gesondert betrachten und den Ausdruck (5.21) für die Teilchenzahl so schreiben:

$$\langle N \rangle = \langle n_0 \rangle + \sum_{k \neq 0} \langle n_k \rangle = \frac{z}{1-z} + \frac{N}{n\lambda^3} g_{3/2}(z). \quad (5.28)$$

Mit (5.27) kann man auch schreiben

$$\langle N \rangle = \frac{z}{1-z} + N \left(\frac{T}{T_c(n)} \right)^{3/2} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)}. \quad (5.29)$$

Wie ist das zu interpretieren? Wenn $T < T_c$, dann ist der zweite Term auf der rechten Seite kleiner als N , also muss die Zahl der Teilchen im Grundzustand $N_0 = z/(1-z)$ makroskopisch groß sein. Umstellung der Gleichung gibt

$$N_0 = N \left(1 - \left(\frac{T}{T_c(n)} \right)^{3/2} \right). \quad (5.30)$$

Dies ist die Bose-Einstein-Kondensation. Wenn $T > T_c(n)$, geht $N_0 \rightarrow 0$ und es gilt einfach (5.23).

Aus dem großkanonischen Potential erhält man unmittelbar den Druck

$$p = \frac{k_{\text{B}}T}{\lambda^3} g_{5/2}(z), \quad (5.31)$$

zu dem das Kondensat nichts beiträgt, ebensowenig wie zu der inneren Energie

$$U = \frac{3}{2}pV. \quad (5.32)$$

Diese letztere Gleichung gilt erstaunlicherweise für ideale Bose-, Fermi- und Boltzmann-Gase gleichermaßen.

Bei hohen Temperaturen muss die Bose-Statistik in die Boltzmann-Statistik übergehen. Das bestätigt man mit der Entwicklung in (5.25) in niedrigster Ordnung. Die nächste Ordnung zeigt, dass allein aufgrund der Statistik – ohne alle Wechselwirkung der Teilchen! – das Gas sich verhält, also gäbe es eine effektive Anziehung, denn der Druck vermindert sich gemäß

$$p = nk_{\text{B}}T \left(1 - \frac{n\lambda^3}{2^{5/2} + \dots} \right). \quad (5.33)$$

Diskutieren wir noch etwas genauer die Bose-Einstein-Kondensation. Da das Kondensat zum Druck nichts beiträgt, wird er allein durch die nicht kondensierten Teilchen gegeben. Für $T < T_c$ ist daher in (5.31) $z = 1$ zu setzen,

$$p = \frac{k_{\text{B}}T}{\lambda^3} g_{5/2}(1) = 1.342 \frac{k_{\text{B}}T}{\lambda^3} \quad (T < T_c). \quad (5.34)$$

Für die Berechnung der Entropie und der spezifischen Wärme sei auf Schwabl, Abschnitt 4.4 verwiesen. Bei $T < T_c$ sind beide proportional zu $T^{3/2}$, und bei $T = T_c$ ist $C_V = 1.93Nk_{\text{B}}$. Bei hohen Temperaturen andererseits gilt das klassische Verhalten $C_V \rightarrow 1.5Nk_{\text{B}}$. Am Phasenübergang hat C_V eine Spitze als Maximum, aber es ist stetig. Man kann das als einen Phasenübergang 3. Ordnung bezeichnen, denn die 2. Ableitung des Potentials ist noch stetig.

5.3 Fermi-Statistik

Fermi-Teilchen haben immer eine Masse, auch wenn die wie bei Elektronen klein ist. Die Fermi-Statistik ist einerseits sehr anders als die Bose-Statistik, andererseits sind alle Rechnungen sehr ähnlich, weil die großkanonische Zustandssummen so ähnlich sind.⁵

Die großkanonische Zustandssumme ist

$$Z_{GC} = \prod_k (1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}), \quad (5.35)$$

und hieraus ergibt sich das großkanonische Potential

$$\Phi = -pV = -k_{\text{B}}T \sum_k \log(1 + e^{-\beta(\varepsilon_k - \mu)}). \quad (5.36)$$

Aus der thermodynamischen Identität dieses Potentials folgt

$$\langle N \rangle = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1} = \sum_k \langle n_k \rangle. \quad (5.37)$$

Hier gibt es das Problem nicht, dass der Nenner verschwinden könnte; das chemische Potential kann negativ sein (bei hohen Temperaturen) und auch positiv (bei niedrigen T).

(Hier fehlt der Inhalt der Vorlesung vom 23. Januar: (i) Fermi-Statistik ausgewertet, so wie man dies in allen Lehrbüchern findet, z. B. im Schwabl; (ii) Theorie der Weißen Zwerge – dies wird bei Schwabl nicht behandelt, aber natürlich an anderen Stellen. Falls ich die Gelegenheit finde, werde ich hier noch nachtragen, was ich darüber gesagt habe.)

⁵Diese Verwandtschaft zeigt sich auch in analytischen Eigenschaften, so dass der Gedanke naheliegend ist, es mögen zu allen Spins „supersymmetrische Paare“ existieren. Bislang wurden aber zu ganzzahligen Spins nur Bosonen und zu halbzahligen nur Fermionen gefunden. In diesem Sinne bleiben diese Teilchensorten auch analytisch getrennt.

6 Phasenübergänge und Renormierung

Das Meiste, was ich in diesem letzten Abschnitt der Vorlesung brachte, findet sich in ausführlicherer Form im Buch „Statistische Mechanik“ von F. Schwabl. Genauer sind es die Kapitel 5.4 (Reale Gase: van der Waals-Zustandsgleichung), 6.5 (Ferromagnetismus) und 7 (Phasenübergänge, Renormierungsgruppentheorie). Deswegen kann ich für Vieles auf das Buch verweisen. Die einzige wesentliche Abweichung ist die Behandlung des zweidimensionalen Ising-Modells, die ich bei Schwabl nicht befriedigend finde.

Phasenübergänge sind, physikalisch gesprochen, Änderungen des Aggregatzustands eines makroskopischen Systems bei Veränderungen der thermodynamischen Variablen (Temperatur, Druck, Magnetfeld, ...); mathematisch sind es Singularitäten. Man spricht von Phasenübergängen *erster Ordnung*, wenn bereits die ersten Ableitungen der thermodynamischen Potentiale unstetig sind (etwa Volumen und Entropie beim Schmelzen von festen Körpern oder beim Verdampfen von Flüssigkeiten). Bei Phasenübergängen *zweiter Ordnung* sind erst die zweiten Ableitungen unstetig (etwa spezifische Wärmen oder Suszeptibilitäten). Bei der Bose-Kondensation war sogar die spezifische Wärme noch stetig von T abhängig, erst deren Ableitung ist unstetig. Das aber ist untypisch, wie es auch untypisch ist, dass schon das ideale Gas einen Phasenübergang hat. Denn sonst ist die Zustandsänderung eine Folge der Wechselwirkung der Teilchen untereinander. Dementsprechend schwierig ist es, die Zustandssummen auszuführen und die Thermodynamik herzuleiten. Man ist auf Näherungen und gute Ideen angewiesen.

Dabei stehen ganz überwiegend die Phasenübergänge zweiter Art im Vordergrund – nicht, weil sie häufiger vorkämen, sondern weil sie in einem zu besprechenden Sinn „universelles Verhalten“ zeigen. Bei den Übergängen erster Ordnung gibt es diese Art von Universalität nicht; da muss man halt unter den gegebenen Bedingungen (z. B. von Temperatur und Druck) die thermodynamischen Potentiale der in Betracht kommenden Phasen (z. B. flüssig und gasförmig) berechnen und nachschauen, bei welcher Phase es kleiner ist: das ist dann die Gleichgewichtsphase. Möglicherweise gibt eine Koexistenz der beiden Phasen (in geeigneten Proportionen) noch günstigere Potentiale: dann ist das Gleichgewicht eine heterogene Phase. Genauere Betrachtung zeigt, dass die Betrachtung des Gleichgewichts in diesem Zusammenhang nicht ausreicht, weil es metastabile Zustände geben kann (unterkühlte oder überhitzte Phasen), so dass die Verhältnisse auf verschiedenen Zeitskalen verschieden sein können. Hier spielt die Nicht-Gleichgewichts-Dynamik von Keimbildungsprozessen eine Rolle, und all dies ist nicht in dem Sinne quantitativ universell wie bei den Phasenübergängen zweiter Ordnung. Ab hier soll nur noch von letzteren die Rede sein.

Man spricht bei den Übergängen zweiter Ordnung auch von „Ordnung-Unordnungs-Übergängen“, weil in all diesen Fällen eine physikalische Größe existiert, die man mit Landau (1936) den *Ordnungsparameter* (OP) nennt. Am einfachsten zu illustrieren ist das beim Curie-Punkt eines Ferromagneten; das ist die Temperatur T_c , bei der die Magnetisierung verschwindet. In diesem Fall ist der OP ein Vektor, der unterhalb T_c einen endlichen Betrag und natürlich eine Richtung hat, oberhalb T_c verschwindet er. Und das ist typisch: es gibt eine Größe σ , die oberhalb T_c den Mittelwert Null, unterhalb einen endlichen Wert. Die Anzahl n der Komponenten dieses OP ist ein wichtiger Parameter der Theorie wie auch die Dimension d des Raumes, in dem das System lebt. Ein normaler Magnet hat $n = 3$ und $d = 3$. Manche Festkörper sind aber in der Weise anisotrop, dass die Magnetisierung nur in eine Kristallrichtung zeigen kann. Dann ist $n = 1$ und $d = 3$. Im Falle von Filmen oder von Materialien, bei denen die magnetische Kopplung der Spins nur in bestimmten Ebenen existiert, ist $d = 2$. Am kritischen Punkt des van der Waals-Fluids ist der OP die Differenz der Dichten oder spezifischen Volumina von flüssiger und gasförmigem Zustand; das ist eine skalare Größe, also $n = 1$ und $d = 3$. In komplizierteren Systemen wie etwa flüssigen Kristallen kann der OP ein Tensor sein mit einer größeren Zahl von Komponenten. Im Rahmen der zu diskutierenden Renormierungstheorie findet man, dass das sog. „kritische Verhalten“ der Systeme allein von n und d abhängt; durch ein Paar (n, d) wird in diesem Sinne eine *Universalitätsklasse* definiert.

Wenn der OP verschwindet, hat das System in Bezug auf ihn eine bestimmte *Symmetrie*. Im Falle des normalen Magneten wäre es (oberhalb von T_c) die Isotropie: alle Richtungen des Raums sind gleichberechtigt. Sobald aber eine Magnetisierung vorliegt (unterhalb T_c) ist diese Symmetrie gebrochen. In diesem Sinne ist jeder Phasenübergang zweiter Ordnung mit einem Symmetriebruch verknüpft. Man spricht auch von „spontaner Symmetriebrechung“, weil die Hamiltonfunktion des Systems (der Hamilton-Operator) die volle Symmetrie zwar besitzt, der Gleichgewichtszustand aber nicht unbedingt. Dass so etwas möglich ist, kennen wir aus vielen Bereichen der Physik. Zum Beispiel hat ein Würfel 6 gleichberechtigte Möglichkeiten, zur Ruhe zu kommen, das ist in dem System die Symmetrie; eine davon muss er „wählen“ – und damit bricht er „spontan“ diese Symmetrie. Ähnlich beim Magneten: sobald die Temperatur unter T_c fällt, bildet sich eine Magnetisierung aus. Dabei sind zwar alle Richtungen gleich wahrscheinlich, aber eine muss gewählt werden. Sehr kleine Fluktuationen in den Anfangsbedingungen können hier den Ausschlag geben. Man spürt, dass in den Bereichen um T_c herum die Systeme sehr empfindlich reagieren; kein Wunder also, dass die mit dem OP verbundene Suszeptibilität sogar divergiert.

Der Renormierungstheorie, die seit 1970 all diese Dinge auch quantitativ be-

friedigend beschreibt, beruht auf dem Gedanken, dass die Summation über die Mikrozustände i eines Systems, wie sie in der Zustandssumme vorgenommen werden muss,

$$e^{-\beta F} = \sum_i e^{-\beta E(i)} \quad (6.1)$$

mit $E(i)$ als Energie des Zustands i , in Schritten vorgenommen werden kann – etwa in der Weise, dass man i in zwei Teile aufteilt, $i = (i', i'')$, und zunächst nur über die i'' summiert, danach erst über die i' . Nach dem ersten Schritt hat man eine Größe $E(i')$, die in Bezug auf die $E(i', i'')$ wie eine freie Energie konstruiert ist, in Bezug auf F aber wie eine Energiefunktion wirkt:

$$e^{-\beta F} = \sum_{i'} e^{-\beta E(i')} \quad \text{mit} \quad e^{-\beta E(i')} = \sum_{i''} e^{-\beta E(i', i'')}. \quad (6.2)$$

In der Praxis der Anwendung dieses Gedankens charakterisieren die (i', i'') ein Gitter mit kleiner Maschenweite (oder Äquivalentes), die i' ein gröberes Gitter. Wenn nun die funktionale Form, in der die Wechselwirkung der Teilchen in $E(i', i'')$ auftritt, mit der in $E(i')$ identisch ist, lediglich mit anderen Werten der Parametern, dann lässt sich das Verfahren im Raum der Parameter iterieren, und es lassen sich die Phasenübergänge mitsamt den kritischen Exponenten identifizieren. Die Kunst der Renormierungstheorie besteht darin, ein Schema zu finden, in dem die funktionale Gleichheit der $E(i')$ mit den $E(i', i'')$ wenigstens näherungsweise gegeben ist.

6.1 Kritische Indizes/Exponenten

In Vorlesung und Übungen wurden drei Systeme diskutiert: Magnetismus, van der Waals-Fluid und – als deren gedankliche Abstraktion – das von Landau eingeführte allgemeine System mit T -abhängigem OP. Die Zustandsgleichungen, die dabei für Magnetisierung als Funktion von Temperatur und Magnetfeld bzw. für Volumen als Funktion von Temperatur und Druck gewonnen wurden, sind keine exakten Auswertungen der jeweiligen Zustandssumme, sondern sogenannte „Molekularfeld-Näherungen“ (*mean field*-Näherungen), bei denen die Wechselwirkung aller Teilchen mit einem gegebenen Teilchen durch ein effektives Zusatzfeld berücksichtigt wird, welches die *mittlere* Wirkung der anderen Teilchen repräsentiert. Wie das im Einzelnen geschieht, ist bei Schwabl gut beschrieben.

Das Landau-Modell enthält die Essenz dieser Näherungen, die auch in anderen physikalischen Systemen immer wieder gemacht werden (mangels besserer Alternativen). In der Version, die als Landau-Ginzburg-Theorie bekannt ist, werden auch noch räumliche Fluktuationen in Rechnung gestellt. Diese

Theorie wurde anfangs der 1950er Jahre zur Beschreibung der Supraleitung entworfen, noch ehe es dafür ein mikroskopisches Verständnis gab. Sie ist bis heute die in der Praxis der Supraleitung am meisten verwendete Theorie, wenn es um die Beschreibung makroskopischer Phänomene geht (z. B. den Josephson-Effekt). Der OP ist dort eine makroskopische quantenmechanische Wellenfunktion, die das Kondensat der Cooper-Paare beschreibt (mit doppelter Elektronenladung).

Im Folgenden soll diese Ginzburg-Landau-Theorie skizziert werden, wobei der OP als ortsabhängiger Vektor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ mit n Komponenten in d Dimensionen angesetzt werde, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ und $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Es wird dann angenommen, dass die freie Energie als räumliches Integral über eine Dichte dargestellt werden kann, die ihrerseits in der Nähe des Phasenübergangs nach $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ entwickelt werden kann. Die freie Energie ist in diesem Sinne ein Funktional des ortsabhängigen OP:⁶

$$F(\{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\}) = \int d^d \mathbf{x} f(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) \quad (6.3)$$

mit

$$f(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = a_0 + a_2 \boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{x}) + a_4 \boldsymbol{\sigma}^4(\mathbf{x}) + c(\nabla \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}))^2 - \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}). \quad (6.4)$$

Die einzelnen Terme bedürfen der Erläuterung. Der letzte Term $\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ stellt den Einfluss eines äußeren Feldes $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ dar, das den OP in seine eigene Richtung zieht. Ohne ein solches Feld treten nur gerade Potenzen von $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ auf; das reflektiert die räumliche Symmetrie des Systems. Der Term a_0 ist ein hier uninteressanter Background der freien Energie, die anderen Terme sind zu verstehen mit

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \quad \boldsymbol{\sigma}^4 = (\boldsymbol{\sigma}^2)^2, \quad (\nabla \boldsymbol{\sigma})^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^d \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_k} \right)^2. \quad (6.5)$$

Die Funktion $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ wird als eine zunächst frei wählbare Ortsabhängigkeit von OP angesehen, die sich aber im Gleichgewicht so einstellt, dass F bei gegebener Temperatur T und gegebenem Feld \mathbf{h} minimal wird. Der Term $a_4 \boldsymbol{\sigma}^4$ soll dabei immer stabilisierend wirken, d. h. er soll kleine $\boldsymbol{\sigma}^2$ favorisieren. Das tut er, wenn $a_4 > 0$ ist; im Übrigen wird ein konstantes a_4 angenommen. Der Term $a_2 \boldsymbol{\sigma}^2$ soll die Tendenz zu Ordnung oder Unordnung widerspiegeln.

⁶Im Hinblick auf die Uminterpretation nach (6.18) wäre es besser, statt F und f immer βF bzw. βf zu nehmen, aber da $\beta = 1/k_{\text{B}}T$ als Konstante $1/k_{\text{B}}T_c$ anzusehen ist, sparen wir uns dies und denken das β in die Konstanten auf der rechten Seite von (6.4) hinein genommen.

Deshalb soll er für $T > T_c$ ein kleines, bei $T < T_c$ ein großes σ^2 favorisieren. Im einfachsten Fall also

$$a_2 = a'_2(T - T_c), \quad a'_2 > 0. \quad (6.6)$$

Schließlich soll der Term $c(\nabla\sigma)^2$ den Energieaufwand von Inhomogenitäten berücksichtigen. Das tut er mit geeignetem positivem c . Die drei Parameter a'_2, a_4, c werden als konstant angenommen. Sie müssten, wenn verlangt, aus einer mikroskopischen Theorie berechnet werden (was im Fall der Supraleitung 1956 Bardeen, Cooper und Schrieffer gelang).

Auf dieser Grundlage diskutieren wir zuerst den homogenen Fall, die ursprüngliche Landau-Theorie. Sei also σ von \mathbf{x} unabhängig, so dass der Term mit c wegfällt. Das Minimum von $F(T, \mathbf{h})$ ist dann dasselbe wie das von $f(T, \mathbf{h})$ und ergibt sich durch Ableiten nach σ :

$$\mathbf{h} = 2\sigma(a'_2(T - T_c) + 2a_4\sigma^2). \quad (6.7)$$

Wenn es kein äußeres Feld gibt, $\mathbf{h} = 0$, dann gibt es zwei Lösungen: $\sigma = 0$, die Lösung ohne Ordnung, und $\sigma^2 = -(a'_2/2a_4)(T - T_c)$, die Lösung mit Ordnung, die allerdings nur für $T < T_c$ reell ist. Eine Skizze der freien Energiedichte zeigt, dass die Lösung $\sigma = 0$ oberhalb T_c tatsächlich das Minimum darstellt, unterhalb T_c tut es die andere. Es ist nun eine Konvention, die T -Abhängigkeit des OP unterhalb T_c durch den Exponenten β zu charakterisieren:

$$|\sigma| = \sqrt{\frac{a'_2}{2a_4}} \sqrt{T_c - T} \propto (T_c - T)^\beta, \quad \beta = \frac{1}{2}. \quad (6.8)$$

Über die Richtung des OP wird nichts gesagt: die stellt sich irgendwie ein und bricht damit die Symmetrie der ungeordneten Phase „spontan“. Ein zweiter *kritischer Index* oder Exponent δ beschreibt die Abhängigkeit des OP vom äußeren Feld bei $T = T_c$:

$$|\sigma| = \left(\frac{|\mathbf{h}|}{4a_4}\right)^{1/3} \propto |\mathbf{h}|^{1/\delta}, \quad \delta = 3. \quad (6.9)$$

Die Indizes γ bzw. γ' charakterisieren die Divergenz der Suszeptibilität, wenn die Temperatur sich von oben oder unten dem Wert T_c nähert. Durch Ableiten von (6.7) finden wir zuerst

$$\frac{d|\sigma|}{d|\mathbf{h}|} = \frac{1}{2a'_2(T - T_c) + 12a_4\sigma^2}, \quad (6.10)$$

und wenn wir nun oberhalb T_c einsetzen $\sigma = 0$, dann finden wir

$$\chi_T = \left.\frac{d|\sigma|}{d|\mathbf{h}|}\right|_T = \frac{1}{2a'_2(T - T_c)} \propto (T - T_c)^{-\gamma}, \quad \gamma = 1, \quad (6.11)$$

und unterhalb T_c folgt mit (6.8)

$$\chi_T = \left. \frac{d|\boldsymbol{\sigma}|}{d|\mathbf{h}|} \right|_T = \frac{1}{4a'_2(T_c - T)} \propto (T_c - T)^{-\gamma'}, \quad \gamma' = 1. \quad (6.12)$$

Dass $\gamma = \gamma'$ gilt, ist nicht selbstverständlich, wurde aber experimentell, auch wenn der tatsächliche Wert nicht 1 ist, immer wieder bestätigt.

Als nächstes ist der Exponent α zu diskutieren, der die spezifische Wärme betrifft. Hier gibt es zwei verschiedene Aussagen, je nachdem, ob wir die einfache Landau-Theorie (ohne Fluktuationen) oder die Ginzburg-Landau-Theorie (mit Fluktuationen) zugrunde legen. Ohne Fluktuationen ist die freie Energie nach (6.4)

$$F = L^d(a_0 + a'_2(T - T_c)\boldsymbol{\sigma}^2 + a_4\boldsymbol{\sigma}^4), \quad (6.13)$$

wobei mit L^d das d -dimensionale Volumen gemeint ist. Wenn nun $T > T_c$ und darum $\boldsymbol{\sigma}^2 = 0$ ist, dann ergibt sich für die spezifische Wärme

$$C_h = -T_c \left. \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right|_{h=0} = 0 \propto (T - T_c)^{-\alpha}, \quad \alpha = 0. \quad (6.14)$$

Unterhalb T_c ist wieder (6.8) zu benutzen, und wir finden

$$C_h = T_c L^d \frac{a'_2}{2a_4} \propto (T_c - T)^{-\alpha'}, \quad \alpha' = 0. \quad (6.15)$$

Oberhalb T_c verschwindet C_h , unterhalb ist sie konstant, in beiden Fällen wieder der gleiche Exponent, wenn es auch bei T_c einen Sprung gibt. Wir sagen $\alpha = \alpha' = 0_{\text{Sprung}}$.

In der Ginzburg-Landau-Theorie müssen wir die Fluktuationen berücksichtigen, und dann wird die Sache etwas komplizierter. Dazu müssen wir etwas ausholen und die freie Energie (6.3) statt durch $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ durch dessen Fourier-Komponenten ausdrücken:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{\mathbf{k} < \Lambda} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{L^{d/2}} \int d^d \mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (6.16)$$

Dabei ist mit $\Lambda = 2\pi/a$ der Maximalwert der $|\mathbf{k}|$ gemeint (Brillouin-Zone), auf den es aber hier nicht ankommt, denn wie sich zeigen wird, sind nur die langwelligigen Komponenten interessant. Setzen wir dies in den Ausdruck für die freie Energie ein, so folgt

$$\begin{aligned} F = & a_0 L^d + \sum_{\mathbf{k} < \Lambda} (a_2 + ck^2) \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{-\mathbf{k}} \\ & + \frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}'' < \Lambda} a_4 (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}'}) (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}''} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{-\mathbf{k}-\mathbf{k}'-\mathbf{k}''}) - L^{d/2} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{h}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Im homogenen Fall (Landau) wäre $\sigma_{\mathbf{k}} = 0$ für alle $\mathbf{k} \neq 0$ und $\sigma_0 = L^{d/2}\sigma$. Damit erhielten wir dieselben Resultate wie oben. Wenn wir nun aber die Fluktuationen berücksichtigen (in Gaußscher Näherung, also bis zur zweiten Ordnung der Abweichung vom jeweiligen Mittelwert), ergeben sich neue Resultate. Wir beginnen mit dem Bereich oberhalb T_c . Dort ist der Mittelwert des OP Null, und bis zur zweiten Ordnung ist

$$F(\{\sigma_{\mathbf{k}}\}) = a_0 L^d + \sum_{\mathbf{k} < \Lambda} (a_2 + ck^2) |\sigma_{\mathbf{k}}|^2, \quad (6.18)$$

denn $\sigma_{-\mathbf{k}}$ ist das komplex Konjugierte von $\sigma_{\mathbf{k}}$. An dieser Stelle interpretieren wir den Ausdruck für F um als Hamilton-Funktion des Systems, bei dem die $\sigma_{\mathbf{k}}$ jeweils eine Konfiguration darstellen, mit statistischem Gewicht⁷

$$w(\{\sigma_{\mathbf{k}f}\}) \propto \exp\{-F(\{\sigma_{\mathbf{k}}\})\} \quad (6.19)$$

und berechnen damit Mittelwerte. Da F in den $\sigma_{\mathbf{k}}$ quadratisch ist, gilt zunächst

$$\langle \sigma_{\mathbf{k}} \rangle = 0, \quad (6.20)$$

aber für den Mittelwert der Quadrate von $\sigma_{i,\mathbf{k}}$ gilt

$$G(k) := \langle |\sigma_{i,\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{a_2 + ck^2}. \quad (6.21)$$

Wir werden dies weiter unten als Fourier-Transformierte der OP-Auto-Korrelationsfunktion diskutieren. Zunächst aber berechnen wir die freie Energie aus $e^{-F} = \text{Spur } e^{-F(\{\sigma_{\mathbf{k}}\})}$ und damit dann die spezifische Wärme. Die Spur ist dabei über alle Konfigurationen $\sigma_{\mathbf{k}}$ zu nehmen. Wie üblich ziehen wir dabei die Summe in $F(\{\sigma_{\mathbf{k}}\})$ als Produkt vor die Summe $\int d^n \sigma_{\mathbf{k}_1} d^n \sigma_{\mathbf{k}_2} \dots$ und benutzen

$$\begin{aligned} \int \prod_{\mathbf{k} < \Lambda} d^n \sigma_{\mathbf{k}} e^{-(a_2 + ck^2) |\sigma_{\mathbf{k}}|^2} &= \left(\int \prod_{\mathbf{k} < \Lambda} \prod_{i=1}^n d\sigma_{i,\mathbf{k}} d\sigma_{i,-\mathbf{k}} e^{-(a_2 + ck^2) |\sigma_{\mathbf{k}}|^2} \right)^{1/2} \\ &= \left(\int \prod_{\mathbf{k} < \Lambda} d|\sigma_{i,\mathbf{k}}| 2\pi |\sigma_{i,\mathbf{k}}| e^{-(a_2 + ck^2) |\sigma_{i,\mathbf{k}}|^2} \right)^{n/2} = \left(\prod_{\mathbf{k} < \Lambda} \frac{\pi}{a_2 + ck^2} \right)^{n/2} \end{aligned} \quad (6.22)$$

(In dem Schritt von der ersten zur zweiten Zeile haben wir Polarkoordinaten eingeführt.) Damit ergibt sich für die freie Energie

$$F = a_0 L^d - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} < \Lambda} n \log \frac{\pi}{a_2 + ck^2} \quad (6.23)$$

⁷Im Sinne der Fußnote auf S. 80 denken wir uns β in das F einbezogen.

und für die spezifische Wärme (beachte $a_2 = a'_2(T - T_c)$)

$$C_h = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \frac{n}{2} \sum_{k < \Lambda} \frac{a_2'^2}{(a_2 + ck^2)^2} = \frac{n}{2} a_2'^2 T \int_{k < \Lambda} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(a_2 + ck^2)^2}. \quad (6.24)$$

Zur Auswertung dieses Integrals führen wir eine Länge ξ ein, die sich unten als Korrelationslänge erweisen wird:

$$\xi^2 = \frac{c}{a_2} = \frac{c}{a_2'(T - T_c)} \quad (6.25)$$

und die bei $T \rightarrow T_c$ divergiert. Mit dem dimensionslosen $k' = \xi k$ wird

$$C_h = \frac{n}{2} a_2'^2 T \frac{1}{\xi^d a_2'^2} \int_{k' < \xi \Lambda} \frac{1}{(1 + k'^2)^2}, \quad (6.26)$$

und wenn wir bedenken, dass $a_2 = c/\xi^2$, so finden wir schließlich

$$C_h = C_0 \xi^{4-d} \propto (T - T_c)^{-(2-d/2)} =: (T - T_c)^{-\alpha}. \quad (6.27)$$

Die Konstante C_0 ist bis auf den Faktor $(n/2)T(a_2'/c)^2$ das Integral in (6.26), das für $d < 4$ konvergiert. Das Ergebnis für den kritischen Index α ist also jetzt dimensionsabhängig und lautet

$$\alpha = 2 - \frac{d}{2}, \quad (6.28)$$

in drei Dimensionen also $\alpha = 1/2$. Während die Landau-Theorie mit $\alpha = 0$ die Divergenz unterschätzt, wird sie in der Ginzburg-Landau-Theorie stark überschätzt. In der Renormierungstheorie wird das korrigiert.

Die analoge Auswertung der freien Energie unterhalb T_c ist etwas aufwendiger, weil die Fluktuationen auf den Mittelwert des OP bezogen werden müssen. Am Ende ergibt sich aber auch hier für den Index α' das Resultat (6.28).

Kommen wir jetzt zur Diskussion der OP-Auto-Korrelationsfunktion, die in der Tat den Schlüssel zu einem tieferen Verständnis des Phasenübergangs führt. Als Auto-Korrelationsfunktion des OP bezeichnet man den Mittelwert

$$g_{ij}(\mathbf{r}) = \langle \delta\sigma_i(\mathbf{x}) \delta\sigma_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = g(r) \delta_{ij}, \quad (6.29)$$

der wegen der angenommenen Translationsinvarianz nicht von \mathbf{x} abhängt und wegen der Isotropie nicht von der Richtung von \mathbf{r} ; aufgrund der Symmetrie des statistischen Gewichts in Bezug auf die Komponenten von $\boldsymbol{\sigma}$ ist g_{ij} außerdem proportional zu δ_{ij} . Mit $\delta\sigma_i(\mathbf{x})$ ist die Abweichung vom Mittelwert gemeint; oberhalb von T_c ist dieser Null, so dass man das δ weglassen

kann; unterhalb muss man den durch (6.8) gegebenen Mittelwert abziehen. Wir werden uns auf Rechnungen oberhalb T_c beschränken und daher das δ ignorieren. Einsetzen von (6.16) zeigt, dass $g(r)$ die Fourier-Transformation der Funktion $G(k)$ in (6.21) ist:

$$g(r) = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} G(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = A\xi^{2-d} \int \frac{d^d \mathbf{k}'}{(2\pi)^d} \frac{1}{1+k'^2} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}/\xi}, \quad (6.30)$$

wobei A eine Konstante ist. Das Integral lässt sich durch Anwendung von Polarkoordinaten und Residuensatz auswerten (wobei man den Integrationsweg $-\infty < k < \infty$ im Unendlichen auf bekannte Weise schließen muss). Das Ergebnis hängt von der Dimension ab. Im Fall $d = 3$ findet man (bei $T > T_c$)

$$g(r) = \frac{1}{4\pi c} \frac{e^{-r/\xi}}{r}, \quad G(k) = \frac{1}{2c} \frac{\xi^2}{1 + \xi^2 k^2}. \quad (6.31)$$

$g(r)$ hat den Verlauf des Yukawa-Potentials; es fällt auf der Länge ξ ab, deshalb wird ξ Korrelationslänge genannt. Mit (6.25) sehen wir, dass

$$\xi \propto (T - T_c)^{-1/2} = (T - T_c)^{-\nu}, \quad \nu = \frac{1}{2}. \quad (6.32)$$

Hiermit haben wir einen weiteren kritischen Index ν , der als ν' auch unterhalb T_c denselben Wert hat. Die Ginzburg-Landau-Theorie unterschätzt die Divergenz der kritischen Länge.

Aus der Gleichgewichts-Statistik wissen wir, dass die Suszeptibilitäten als Erwartungswerte von Schwankungsquadraten dargestellt werden können. Für die Suszeptibilität des OP heißt dies

$$\chi_T \propto G(k=0) \propto \xi^2 \propto (T - T_c)^{-2\nu} = (T - T_c)^{-\gamma}, \quad (6.33)$$

was im Rahmen der Ginzburg-Landau-Theorie wieder $\gamma = 1$ ergibt. Hier haben wir das singuläre Verhalten der Suszeptibilität auf das der Korrelationslänge zurückgeführt. Wenn sich im Rahmen einer genaueren Analyse herausstellt, dass ν einen anderen Wert hat als $1/2$, dann schlägt das auch auf γ durch. Die experimentelle Vermessung von $G(k)$ zeigt, dass bei $T = T_c$ nicht genau $G(k) \propto 1/k^2$ gilt, wie (6.31) sagt, sondern $G(k; T = T_c) \propto 1/k^{2-\eta}$ mit einem weiteren kritischen Index η , der meist ziemlich klein ist. Statt (6.31) gilt deshalb allgemein

$$G(k) \propto \frac{\xi^{2-\eta}}{1 + (k\xi)^{2-\eta}}, \quad (6.34)$$

was für den Zusammenhang von γ dann bedeutet

$$\gamma = (2 - \eta)\nu. \quad (6.35)$$

Eine solche Beziehung zwischen kritischen Indizes nennt man ein „Skalengesetz“. In diesem Fall spricht man sogar von *Hyperscaling*, weil der Zusammenhang der Korrelationsfunktion mit der Suszeptibilität ein sehr allgemeiner ist. Kennt man ν und η als die beiden Indizes, die das kritische Verhalten der Korrelationsfunktion beschreiben, dann auch sofort γ .

Ein weiteres Hyper-Skalengesetz erhalten wir für die spezifische Wärme, die wir ebenfalls auf ξ zurückführen können. Es bleibt nämlich die Herleitung des Zusammenhangs (6.26) richtig, auch wenn ξ mit einem andern ν divergiert als mit $1/2$. Deshalb gilt allgemein

$$\alpha = 2 - d\nu. \quad (6.36)$$

Wir werden sehen, dass es noch weitere Skalengesetze gibt, nämlich

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad \text{und} \quad (2 - \alpha) = \beta(1 + \delta). \quad (6.37)$$

Diese vier Gesetze (sowie $\alpha = \alpha'$, $\gamma = \gamma'$, $\nu = \nu'$) waren bekannt, noch ehe es die Renormierungstheorie gab. Sie wurden aus sog. „Homogenitätseigenschaften“ hergeleitet, die man damals allerdings nur postulieren konnte. Im Rahmen der RG-Theorie ergeben sie sich zwanglos, so dass wir jetzt zuerst die RG-Theorie vorstellen wollen und daraus dann die Skalengesetze zusammen mit bestimmten Werten der kritischen Indizes herleiten.

6.2 Die RG-Theorie am Beispiel des 2D-Ising-Modells

Es gibt viele Spielarten der RG-Theorie. Sie wurde 1970 von K. G. Wilson in die Theorie der Phasenübergänge eingeführt, nachdem L. P. Kadanoff die wesentlichen Grundideen formuliert hatte und M. E. Fisher sie im Rahmen seines Seminars genauer verstehen wollte. Er beauftragte Wilson mit einem Vortrag darüber, und diesem gelang es aufgrund seiner Erfahrung mit der Renormierung im Kontext der Elementarteilchentheorie, die Kadanoffschen Ideen zu quantitativen Resultaten weiterzuentwickeln. Das geschah ausgehend von der oben diskutierten Ginzburg-Landau-Theorie, war aber im Detail nicht ganz einfach. Wir wenden die Ideen deshalb hier auf das leichter durchschaubare Ising-Modell in zwei räumlichen Dimensionen an. Anmerkungen zu dem realistischeren Ginzburg-Landau-Modell sollen dann erst am Schluss gemacht werden.

Das Ising-Modell hat selbst eine interessante Geschichte. Es wurde von W. Lenz 1920 als einfaches Modell des Ferromagnetismus formuliert und 1925 von seinem Doktoranden E. Ising für den Fall einer Dimension gelöst. Die exakte Durchrechnung des zweidimensionalen Modells gelang 1944 L. Onsager, zunächst ohne Magnetfeld, dann 1949 (zusammen mit B. Kaufman)

auch mit Magnetfeld. Da Onsager aber die Herleitung seines Ergebnisses für die Magnetisierung nie publizierte, dauerte es bis 1952, ehe C. N. Yang das nachholte. Das dreidimensionale Modell hat sich bis heute der exakten Berechnung entzogen.

In Schwabls Buch wird die RG-Theorie zuerst auf das eindimensionale Ising-Modell angewendet, wo sich das exakt durchführen lässt. Da es dort aber keinen wirklichen Phasenübergang gibt (außer formal bei $T_c = 0$), ist das nicht besonders interessant. Schwabl gibt dann auch eine approximative Behandlung des 2D-Ising-Modells, doch ist die quantitativ ziemlich unbefriedigend, so dass ich hier eine Version vorstellen möchte, die ich 1980 im Seminar von H. C. Andersen in Stanford kennengelernt habe. Mir ist nicht bekannt, ob das jemals veröffentlicht wurde.

Das 2D-Ising-Modell auf quadratischem Gitter mit Gitterpunkten (i, j) und Gitterkonstante a ist definiert durch die Hamiltonfunktion

$$H = -J \sum_{nN} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i, \quad (6.38)$$

wobei σ_i eine Spinvariable ist, die nur die Werte ± 1 annehmen kann. $J > 0$ ist eine Konstante, die die ferromagnetische Kopplung repräsentiert, und h ist das äußere Magnetfeld, das die Spins in seine Richtung zieht. Mit „ nN “ ist die Summe über nächste Nachbarn gemeint. Wir definieren die dimensionslosen Felder

$$K := J/k_{\text{B}}T \quad \text{und} \quad L := h/k_{\text{B}}T \quad (6.39)$$

und verstehen K als die Temperaturvariable, L als die des Magnetfeld. Die kanonische Zustandssumme ist

$$Z_N(T, h) = Z_N(K, L) = \sum_{\{\sigma\}} e^{K \sum_{nN} \sigma_i \sigma_j + L \sum_i \sigma_i} \quad (6.40)$$

Die Idee des Folgenden ist jetzt, diese Summe zunächst nur auf dem Teilgitter auszuführen, auf dem $i + j = 0 \pmod{2}$ ist, also auf den Punkten $(0, \pm 2n)$, $(1, 1 \pm 2n)$ etc. mit ganzzahligen n . Es wird also die Hälfte der Freiheitsgrade eliminiert, und übrig bleiben die Spins auf dem Restgitter der Punkte $i + j = 1 \pmod{2}$, das wiederum quadratisch ist mit Gitterkonstante $a\sqrt{2}$ (um 45° gegen das ursprüngliche Gitter gedreht; man mache sich eine Skizze). Die Hoffnung ist, nach Ausführen dieser ersten Summation im Sinne der Relation (6.2) auf eine Darstellung der Form (6.40) zu kommen, bei der nur noch über die Spins des Restgitters zu summieren ist mit allerdings „renormierten“ Variablen (K, L) :

$$Z_N(K, L) = Z_{N/2}(K', L') = \sum_{\{\sigma'\}} e^{K' \sum_{nN} \sigma'_i \sigma'_j + L' \sum_i \sigma'_i}. \quad (6.41)$$

Mit den σ' sind dabei die Spins des „ungeraden“ Gitters gemeint. Es ist denkbar – und i. A. auch notwendig – die Werte dieser Spins gegenüber den ursprünglichen ± 1 ebenfalls zu reskalieren.

Wir werden jetzt zeigen, dass (6.41) nicht ganz, aber fast erreichbar ist. Am Ende einer längeren Diskussion werden wir die folgende Gleichung haben:

$$Z_N(K, L) = \phi^{N/2} Z_{N/2}(K', L') \quad (6.42)$$

mit expliziten Ausdrücken $\phi = \phi(K, L)$, $K' = K'(K, L)$ und $L' = L'(K, L)$. Nachdem wir diese Ergebnisse haben, werden wir daraus Konsequenzen für den Phasenübergang und die kritischen Exponenten ziehen.

Zuerst also werten wir die Teilspur über die Spins des „geraden“ Untergitters aus. Betrachten wir dazu den Punkt $(i, j) = (0, 0) =: 0$ und seine vier nächsten Nachbarn $(1, 0) =: 1$, $(0, 1) =: 2$, $(-1, 0) =: 3$ und $(0, -1) =: 4$, über deren Spins nicht summiert wird, weil sie zum „ungeraden“ Untergitter gehören. Als erstes machen wir uns klar, dass wir die Zustandssumme in ein Produkt über Faktoren der folgenden Art zerlegen können:

$$\psi_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \sum_{\sigma_0 = \pm 1} e^{K\sigma_0(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) + L\sigma_0 + \frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)} \quad (6.43)$$

wobei das Produkt über alle zu 0 äquivalenten Gitterplätze geht. Berücksichtigt sind hier die Wechselwirkungen von 0 mit seinen vier nächsten Nachbarn und seine Energie im Magnetfeld. Von den Punkten 1 bis 4 wird jeweils nur ein Viertel der Energie im äußeren Feld berücksichtigt, weil diese Punkte ja auch Eckpunkte der vier benachbarten großen Zellen sind. Die Summe über die beiden Werte von σ_0 ist aber leicht ausgeführt:

$$\begin{aligned} \psi_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) &= e^{K(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) + L + \frac{1}{4}L(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)} \\ &+ e^{-K(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) - L + \frac{1}{4}L(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Dies hat natürlich in Bezug auf die Zelle aus 1,2,3,4 noch nicht die funktionale Form, die der entsprechende Term für die ursprüngliche Einheitszelle 0,1,(1,1),2 hatte. Das wäre der Fall, wenn wir (6.44) schreiben könnten

$$\phi(K, L) e^{\frac{1}{2}K_1(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4 + \sigma_4\sigma_1) + \frac{1}{4}L_1(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)}, \quad (6.45)$$

wobei der Faktor $1/2$ vor K_1 daher rührt, dass die Wechselwirkung $K_1\sigma_1\sigma_2$ in zwei benachbarten der großen Zellen vorkommt. Dass (6.45) nicht für alle 2^4 möglichen Werte des Quadrupels $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ gleich $\psi_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ sein kann, sieht man leicht durch Einsetzen verschiedener Werte für die σ_i . Dabei

stellt man fest, dass $\psi_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ sechs verschiedene Werte annehmen kann; in (6.45) kommen aber nur drei unbestimmte Werte vor: f , K_1 und L_1 . Wir müssen also drei weitere Parameter einführen, die wir wie folgt wählen: K_2 für die Wechselwirkung zwischen übernächsten Nachbarn, K_3 für eine 4-Punkt-Wechselwirkung und L_2 für eine 3-Punkt-Wechselwirkung mit dem Feld. Wir machen also den Ansatz

$$\begin{aligned} \psi_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = & \phi(K, L) \exp\left\{\frac{1}{2}K_1(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4 + \sigma_4\sigma_1) \right. \\ & + K_2(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_4) + K_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 \\ & + \frac{1}{4}L_1(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \\ & \left. + L_2(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\sigma_4 + \sigma_3\sigma_4\sigma_1 + \sigma_4\sigma_1\sigma_2)\right\} \end{aligned} \quad (6.46)$$

und vergleichen in der folgenden Tabelle die sechs verschiedenen möglichen Werte nach (6.44) und (6.46). Die Spalte z gibt jeweils den Entartungsgrad an: Durch Gleichsetzen der jeweils unterschiedlichen Ausdrücke für

z	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$	(6.44)	(6.46)
1	++++	$e^{4K+2L} + e^{-4K}$	$\phi e^{2K_1+2K_2+K_3+L_1+4L_2}$
4	+++-	$e^{2K+\frac{3}{2}L} + e^{-2K-\frac{1}{2}L}$	$\phi e^{-K_3+\frac{1}{2}L_1-2L_2}$
4	+- - -	$e^L + e^{-L}$	$\phi e^{-2K_2+K_3}$
2	+ - + -	$e^L + e^{-L}$	$\phi e^{-2K_1+2K_2+K_3}$
4	+ - - -	$e^{-2K+\frac{1}{2}L} + e^{2K-\frac{3}{2}L}$	$\phi e^{-K_3-\frac{1}{2}L_1+2L_2}$
1	----	$e^{-4K} + e^{4K-2L}$	$\phi e^{2K_1+2K_2+K_3-L_1-4L_2}$

Tabelle 1: 6 verschiedene Werte von $\psi_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$

$\psi_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ erhalten wir ein Gleichungssystem für die sechs Unbekannten, das sich ohne Probleme folgendermaßen lösen lässt:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{8} \ln(\operatorname{ch}(4K+L)\operatorname{ch}(4K-L)) - \frac{1}{4} \ln \operatorname{ch}(L) \\ K_2 &= \frac{1}{2}K_1 \\ K_3 &= \frac{3}{8} \ln \operatorname{ch}(L) + \frac{1}{16} \ln(\operatorname{ch}(4K+L)\operatorname{ch}(4K-L)) \\ &\quad - \frac{1}{4} \ln(\operatorname{ch}(2K+L)\operatorname{ch}(2K-L)) \\ L_1 &= L + \frac{1}{4} \ln \frac{\operatorname{ch}(4K+L)}{\operatorname{ch}(4K-L)} + \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch}(2K+L)}{\operatorname{ch}(2K-L)} \\ L_2 &= \frac{1}{16} \ln \frac{\operatorname{ch}(4K+L)}{\operatorname{ch}(4K-L)} - \frac{1}{8} \ln \frac{\operatorname{ch}(2K+L)}{\operatorname{ch}(2K-L)} \end{aligned} \quad (6.47)$$

Außerdem ist noch

$$\begin{aligned} \ln \phi = \ln 2 + \frac{1}{8} \ln \operatorname{ch}(L) + \frac{1}{16} \ln(\operatorname{ch}(4K + L)\operatorname{ch}(4K - L)) \\ + \frac{1}{4} \ln(\operatorname{ch}(2K + L)\operatorname{ch}(2K - L)) \end{aligned} \quad (6.48)$$

Hier ist mit ch der cosh gemeint.

Was haben wir bis hier gewonnen? Noch ist die Auswertung exakt, aber wir haben in den großen Zellen 1234 mehr als nur die nächsten Nachbar-Wechselwirkungen plus Ankopplung der einzelnen Spins an das äußere Feld. An dieser Stelle haben wir zwei Möglichkeiten fortzufahren. Die erste wäre, mit dem Ansatz (6.46) fortzufahren und zu hoffen, dass bei einer Iteration des Verfahrens keine weiteren Parameter als K_1, K_2, K_3, L_1, L_2 und ϕ auftreten. Dann hätten wir es eben mit einem 6-dimensionalen Variablenraum zu tun. Leider ist das aber nicht der Fall. Wenn wir das „ungerade“ Gitter ebenso behandelten wie bislang das ursprüngliche, indem wir wieder die Hälfte der Freiheitsgrade eliminierten, dann träten weitere Parameter auf und wir wären bald verloren. Deswegen sollten wir jetzt den zweiten Weg versuchen, nämlich die 5 Parameter K_1, K_2, K_3, L_1, L_2 auf intelligente Weise so auf nur zwei zu reduzieren, dass $\psi_0(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ die Form

$$\phi(K, L) e^{\frac{1}{2}K'(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4 + \sigma_4\sigma_1) + \frac{1}{4}L'(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4)}, \quad (6.49)$$

annimmt.⁸

Hier kommt nun der Trick des Chemikers H. C. Andersen ins Spiel. Er schlägt vor, das Termschema der sechs Exponenten in der rechten Spalte der Tabelle 1 auf optimale Weise anzupassen an dasjenige, das man nur aus den zwei Parametern K' und L' in (6.49) erhält. Stellen wir also eine neue Tabelle auf, in der jetzt diese Exponenten verglichen werden. Betrachten wir zunächst den Fall $L = 0$, also auch $L_1 = L_2 = L' = 0$. Dann hat das Schema der K_i (unter Beachtung von $K_1 > K_2 > K_3$) nach der Größe geordnet die folgenden vier Terme: $2K_1 + 2K_2 + K_3$, zweifach entartet; $-K_3$, achtfach entartet; $-2K_2 + K_3$, vierfach entartet; $-2K_1 + 2K_2 + K_3$, zweifach entartet. Das Schema der mit K' gebildeten Terme ist $2K'$, zweifach; 0 , zwölfmal; $-2K'$, zweifach. Die jeweils niedrigsten Terme ignorieren wir wegen des geringen statistischen Gewichts, das mit ihnen verbunden ist. Von den beiden mittleren Termen des K_i -Schemas nehmen wir den Schwerpunkt, gewichtet mit den Entartungsfaktoren, $K_s = (8(-K_3) + 4(-2K_2 + K_3))/12 = -(2K_2 + K_3)/3$,

⁸Das $\phi(K, L)$ stört nicht, denn es enthält keine Spinvariablen. Übrigens könnte man auch einen Kompromiss zwischen den beiden Wegen einschlagen, indem man sich dafür entscheidet, den Parameter K_2 als übernächste Nachbar-Wechselwirkung mitzunehmen und ab jetzt im dreidimensionalen Parameterraum der K, K_2 und L zu arbeiten. Das würde das Ergebnis geringfügig verbessern, aber noch mehr Arbeit bedeuten.

z	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$	(6.46)	(6.49)			
1	+	+	+	+	$2K_1 + 2K_2 + K_3 + L_1 + 4L_2$	$2K' + L'$
4	+	+	+	-	$-K_3 + \frac{1}{2}L_1 - 2L_2$	$\frac{1}{2}L'$
4	+	+	-	-	$-2K_2 + K_3$	0
2	+	-	+	-	$-2K_1 + 2K_2 + K_3$	$-2K'$
4	+	-	-	-	$-K_3 - \frac{1}{2}L_1 + 2L_2$	$-\frac{1}{2}L'$
1	-	-	-	-	$2K_1 + 2K_2 + K_3 - L_1 - 4L_2$	$2K' - L'$

Tabelle 2: Die Termschemata von Tab. 1 und (6.49) im Vergleich.

und schließlich bestimmen wir K' so, dass die Abstände zwischen jeweils oberem und mittlerem Niveau gleich sind:

$$2K' - 0 = 2K_1 + 2K_2 + K_3 - K_s \quad \Rightarrow \quad K' = K_1 + \frac{4}{3}K_2 + \frac{2}{3}K_3. \quad (6.50)$$

Das L' bestimmen wir aus der Forderung, dass die Zeeman-Aufspaltung der jeweils oberen Niveaus gleich sein soll, also $2(L_1 + 4L_2) = 2L'$:

$$L' = L_1 + 4L_2. \quad (6.51)$$

Mit den Ergebnissen in (6.47) führt das schließlich auf

$$\begin{aligned} K' &= \frac{1}{4} \ln(\operatorname{ch}(4K + L)\operatorname{ch}(4K - L)) \\ &\quad - \frac{1}{6} \ln(\operatorname{ch}(2K + L)\operatorname{ch}(2K - L)) - \frac{1}{6} \ln \operatorname{ch}(L) \\ L' &= L + \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch}(4K + L)}{\operatorname{ch}(4K - L)} \end{aligned} \quad (6.52)$$

Hiermit ist das Ziel erreicht, das in (6.42) angekündigt wurde. Es ist kein exaktes Resultat, aber eine Näherung, die physikalisch gut begründet erscheint. Gehen wir jetzt daran, die Früchte zu ernten.

Die Abbildung $(K, L) \rightarrow (K', L')$ wird Renormierungsabbildung (RA) genannt. Sie ergab sich aus einer Dezimierung der Freiheitsgrade durch partielles Ausführen der Zustandssumme (hier die Hälfte) und den Versuch, das Ergebnis in der alten Form darzustellen. Fragen wir nun nach den Eigenschaften der RA. Wir stellen zunächst fest, dass sie dreierlei Fixpunkte hat. Aus $L' = L$ folgern wir zuerst $L = 0$ oder $K = 0$. Wenn $L = 0$, dann folgt aus $K' = K$ entweder $K = 0$ oder $K = \infty$ oder $K = K_c = 0.4573$ (numerisch zu bestimmen). Wenn $K = 0$, dann gibt es für L keine Einschränkung. Diskutieren wir die Fixpunkte einzeln.

Der Punkt $(K, L) = (\infty, 0)$ entspricht dem Fall $(T, h) = (0, 0)$: dies ist der vollständig und spontan magnetisierte Zustand bei Temperatur 0 und Feld 0. Die Linie $(K, L) = (0, L)$ entspricht dem Fall $(T, h) = (\infty, \infty)$: dies sind vollständig ungeordnete Zustände bei unendlich hoher Temperatur. Der kritische Punkt $(K, L) = (0.4573, 0)$ entspricht $(T, h) = (T_c, 0) = (J/k_{\text{B}}K_c, 0)$, und dies ist der Punkt, für den wir uns interessieren. Wenn wir im (T, h) -Diagramm zunächst auf der T -Achse untersuchen, wie die RA wirkt, dann stellen wir fest, dass der kritische Punkt $T = T_c$ instabil ist, während die Punkte $T = 0$ und $T = \infty$ beide stabil sind. Gehen wir nun in der Nähe von $(T_c, 0)$ zu einem endlichen h , dann finden wir, dass unter RA auch das Feld von dem kritischen Wert $h = 0$ wegläuft. Der kritische Punkt ist also in beiden Richtungen instabil. Können wir das physikalisch interpretieren? Ja, denn die Renormierung ergab sich ja aus einer Vergrößerung des Maßstabs, unter dem wir das System betrachten, d. h. zum Beispiel, dass Korrelationslängen entsprechend kleiner erscheinen, was einer Entfernung vom kritischen Punkt entspricht.

Wir wollen jetzt sehen, welche analytischen Konsequenzen die RA in der Umgebung des kritischen Punktes hat. Es soll gezeigt werden, dass die Eigenwerte der linearisierten RA im Wesentlichen die kritischen Exponenten sind. Diese Linearisierung lässt sich ohne große Mühe explizit ausführen und gibt

$$\begin{pmatrix} \delta K' \\ \delta L' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.417 & 0 \\ 0 & 1.950 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta K \\ \delta L \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} e^{\lambda_K} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta K \\ \delta L \end{pmatrix}. \quad (6.53)$$

Was bedeutet das für die freie Energie und alles, was aus ihr folgt? Gehen wir aus von (6.42) und dem Ausdruck $F(K, L) = Nf(K, L) = -k_{\text{B}}T \ln Z_N(K, L)$ für die freie Energie. Dies gibt, auf ein Teilchen bezogen, die freie Energie

$$f(K, L) = -\frac{1}{2}k_{\text{B}}T \ln \phi(K, L) + \frac{1}{2}f(K', L'). \quad (6.54)$$

Dieser Ausdruck soll am Punkt $(K, L) = (K_c, 0)$ singular sein, wie wir von den Singularitäten der Suszeptibilitäten etc. wissen. Nun zeigt aber der Blick auf (6.48), dass der erste Term auf der rechten Seite von (6.54) keine solche Singularität hat, wir können ihn also im Hinblick auf den Phasenübergang ignorieren. Für den singulären Teil gilt also

$$f_{\text{sing}}(\delta K, \delta L) = \frac{1}{2}f_{\text{sing}}(\delta K', \delta L') = \frac{1}{2}f_{\text{sing}}(e^{\lambda_K} \delta K, e^{\lambda_L} \delta L). \quad (6.55)$$

Diese Beziehung kann man nun iterieren, indem man die RA immer wieder anwendet. Das führt nach l Schritten zu

$$f_{\text{sing}}(\delta K, \delta L) = \left(\frac{1}{2}\right)^l f_{\text{sing}}(e^{l\lambda_K} \delta K, e^{l\lambda_L} \delta L). \quad (6.56)$$

Dies ist bereits eine Form der gesuchten Homogenitäts-Relation, denn sie sagt, dass f_{sing} , wenn man δK und δL in abgestimmter Weise mit Faktoren versieht, sich um einen anderen Faktor – hier 2^l – ändert. Den Exponenten l können wir aus dieser Beziehung eliminieren, indem wir $e^{\lambda_K |\delta K|} = c$ setzen mit hinreichend kleinem, aber beliebigem c , so dass die Linearisierung der RA dort noch gilt. Auflösung nach l gibt

$$l = \frac{\ln c}{\lambda_K} - \frac{\ln |\delta K|}{\lambda_K}, \quad (6.57)$$

und hiermit folgt

$$\left(\frac{1}{2}\right)^l = \left(\frac{|\delta K|}{c}\right)^{\ln 2/\lambda_K}, \quad e^{l\lambda_L} = \left(\frac{|\delta K|}{c}\right)^{-\lambda_L/\lambda_K}. \quad (6.58)$$

Eingesetzt in (6.56) haben wir damit

$$f_{\text{sing}}(\delta K, \delta L) = \left(\frac{|\delta K|}{c}\right)^{\ln 2/\lambda_K} f_{\text{sing}}\left(\pm c, \left(\frac{|\delta K|}{c}\right)^{-\lambda_L/\lambda_K} \delta L\right), \quad (6.59)$$

und wenn wir die weitgehend beliebige Konstante c ignorieren, können wir dies schreiben als

$$f_{\text{sing}}(\delta K, \delta L) = |\delta K|^{\ln 2/\lambda_K} Y_{\pm}(|\delta K|^{-\lambda_L/\lambda_K} \delta L) \quad (6.60)$$

mit je einer Funktion Y_+ bzw. Y_- für den Bereich oberhalb und unterhalb des kritischen Punktes K_c .

Nun bedenken wir, dass $K = J/k_{\text{B}}T$, also $\delta K = -(J/k_{\text{B}}T_c)(\delta T)/T_c = -(J/k_{\text{B}}T_c)\tau$ und $L = \delta L = h/k_{\text{B}}T_c$, letzteres, weil h selbst schon klein von erster Ordnung ist, denn $h_c = 0$. Deswegen können wir den singulären Teil der freien Energie pro Teilchen auch schreiben

$$f_{\text{sing}}(\tau, h) = |\tau|^{\ln 2/\lambda_K} X_{\pm}(h/|\tau|^{\lambda_L/\lambda_K}). \quad (6.61)$$

Aus diesem Ausdruck für die freie Energie können wir die kritischen Beiträge der verschiedenen thermodynamischen Größen formal berechnen. Zum Beispiel ist die spezifische Wärme bei $h = 0$ im Wesentlichen die zweite Ableitung nach der Temperatur, also nach τ , das heißt $-\alpha = \ln 2/\ln \lambda_K - 2$ oder

$$\frac{\ln 2}{\lambda_K} = 2 - \alpha. \quad (6.62)$$

Dies ist eine erste Beziehung zwischen den Eigenwerten der linearisierten RA und einem kritischen Index. Eine zweite erhalten wir durch Berechnung der Magnetisierung gemäß $m = -\partial f_{\text{sing}}/\partial h|_{h=0}$. Es gilt

$$m = |\tau|^{\ln 2/\lambda_K} / |\tau|^{\lambda_L/\lambda_K} X'(0) \propto |\tau|^{\beta}, \quad (6.63)$$

woraus wir entnehmen

$$\beta = 2 - \alpha - \frac{\lambda_L}{\lambda_K}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_L}{\lambda_K} = 2 - \alpha - \beta. \quad (6.64)$$

Der Index δ ist durch das Verhalten von m bei $\tau = 0$ definiert. Der führende Term in der Entwicklung von $X'(h/|\tau|^{\lambda_L/\lambda_K})$ muss deswegen die Potenz $h^{1/\delta}$ haben, und die gesammelten Potenzen von $|\tau|$ müssen Null ergeben. Das bedeutet

$$\frac{\ln 2}{\lambda_K} - \frac{\lambda_L}{\lambda_K} - \frac{1}{\delta} \frac{\lambda_L}{\lambda_K} = 0, \quad (6.65)$$

was mit den Gln. (6.62) und (6.64) auf das Skalengesetz

$$\beta\delta = 2 - \alpha - \beta \quad (6.66)$$

führt. Die bis hier gesammelten Ergebnisse können wir verwenden, um die Homogenitätsrelation (6.61) in die Form zu bringen

$$f_{\text{sing}}(\tau, h) = |\tau|^{2-\alpha} X_{\pm}(h/|\tau|^{\beta\delta}). \quad (6.67)$$

Wenn wir damit dann den Index γ der Suszeptibilität $\partial m/\partial h|_{h=0}$ berechnen wollen, finden wir das Skalengesetz

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2. \quad (6.68)$$

Damit sind, wenn wir auch noch die Hyper-Skalengesetze (6.36) und (6.35) hinzunehmen, alle Indizes bestimmt.

Fassen wir die Ergebnisse zusammen. In Tabelle 3 wird die hier vorgestellte Rechnung nach H. C. Andersen mit der von F. Schwabl und der exakten Rechnung von L. Onsager verglichen. Die ersten beiden Zeilen geben die Lage des kritischen Punktes an, die beiden nächsten die Logarithmen der Eigenwerte der Renormierungs-Abbildung. Die Exponenten α , β , γ , δ wurden aus der homogenen Form des singulären Teils der freien Energie bestimmt, ν und η aus den Hyper-Skalengesetzen. Die Ergebnisse nach Andersen zeigen eine leidlich befriedigende Übereinstimmung mit den exakten Resultaten, die nach Schwabl sind so schlecht, dass er sie in seinem Buch gar nicht selbst angibt (außer dem kritischen Punkt selbst und dem Wert für ν). Seine Behandlung ist offenbar nur als Illustration der Grundideen gemeint. Immerhin führt er dabei noch ein Motiv ein, das ich hier weggelassen habe: neben der Variable K für die nächste Nachbar-Wechselwirkung benutzt er noch eine zweite (bei ihm L genannt), die die übernächste Nachbar-Wechselwirkung berücksichtigt. Diese erweist sich als *irrelevante* Variable in dem Sinne, dass der zugehörige Eigenwert kleiner als 1 ist, so dass ihr Einfluss unter Iteration der RA verschwindet. Solche Variablen treten in typischen Renormierungsverfahren auf, spielen am Ende aber keine Rolle.

	Gleichung	Andersen	Schwabl	Onsager
K_c	(6.52)	0.4573	0.3921	0.4406
L_c	(6.52)	0	0	0
λ_K	(6.53)	0.349	0.543	–
λ_L	(6.53)	0.668	0.288	–
α	$2 - \ln 2/\lambda_K$	0.011	0.723	0_{\log}
β	$2 - \alpha - \lambda_L/\lambda_K$	0.073	0.747	0.125
γ	$2 - \alpha - 2\beta$	1.843	–0.217	1.75
δ	$(2 - \alpha - \beta)/\beta$	26.4	0.709	14
ν	$(2 - \alpha)/d$	0.994	0.638	1
η	$2 - \gamma/\nu$	0.146	2.34	0.25

Tabelle 3: Kritische Exponenten des 2D-Ising-Modells im Vergleich: RG-Rechnungen von Andersen und Schwabl, exakte Rechnung von Onsager

6.3 Weitere Anmerkungen zur RG-Theorie

In der Anwendung auf typische Phasenübergänge in drei Dimensionen gingen Kadanoff und Wilson von der Ginzburg-Landau-Version der freien Energie aus, die zunächst als Hamilton-Funktion auf „mikroskopischem“ Niveau interpretiert wurde und durch sukzessive Iteration eines Reskalierungs- und Renormierungs-Verfahrens im Sinne von (6.2) zur makroskopischen freien Energie führte. Dabei gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Methoden der Renormierung. Die erste findet im realen Raum statt, ähnlich wie das im vorigen Abschnitt auf das Ising-Modell angewandte Verfahren: man fasst eine gewisse Anzahl mikroskopischer Einheiten zu „Blöcken“ zusammen und eliminiert dessen innere Freiheitsgrade. Jeder dieser Blöcke hat dann wiederum einen Freiheitsgrad von der Art der ursprünglichen (z. B. einen Spin mit n Komponenten). Anders als bei dem obigen Verfahren kann es notwendig sein, auch die Länge der Blockspins zu reskalieren – dabei kommt der Exponent η ins Spiel. Im Einzelnen ist die Durchführung dieses Verfahrens ziemlich kompliziert.

Die andere Methode nimmt die Renormierung im Fourier-Raum der \mathbf{k} -Vektoren vor. Ausgehend von der Darstellung (6.17) mit \mathbf{k} -Vektoren aus einer Kugel $k < \Lambda$, wird zunächst über die \mathbf{k} in einer infinitesimalen äußeren Schale dieser Kugel summiert, d. h. es werden die kurzwelligen Freiheitsgrade eliminiert.

Danach werden die Skalen so verändert, dass die Kugel wieder die ursprüngliche Größe hat; die \mathbf{k} -Vektoren sind aber jetzt gewissermaßen verdünnt und die Parameter in (6.17) renormiert. Auch dieses Verfahren ist im Detail nicht einfach; im Rahmen dieser Vorlesung konnte es nicht vorgestellt werden.

Ein interessantes Resultat dieser Methode ist, dass die Molekularfeld-Näherung exakt wird, wenn die räumliche Dimension des Systems $d = 4$ ist. Und da man für das Volumen einer d -dimensionalen Kugel eine Formel hat, die auch für nicht-ganzzahlige d einen Sinn gibt, nämlich

$$V(r) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)} r^d, \quad (6.69)$$

lässt sich die Theorie auch für solche d behandeln. Man kann dann eine Störungstheorie formulieren, bei der $\epsilon = 4 - d$ die Rolle eines kleinen Parameters spielt, und hofft, dass die Ergebnisse auch bei $\epsilon = 1$ noch gut sind. Tatsächlich hat sich dies als recht erfolgreich herausgestellt, da die Koeffizienten der ϵ -Entwicklung klein sind. Die Ergebnisse für ein System, dessen OP n Komponenten hat, lauten

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)}\epsilon + O(\epsilon^2) \\ \eta &= \frac{n+2}{2(n+8)^2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \\ \alpha &= \frac{4-n}{2(n+8)}\epsilon + O(\epsilon^2) \\ \beta &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2(n+8)}\epsilon + O(\epsilon^2) \\ \gamma &= 1 + \frac{n+2}{2(n+8)}\epsilon + O(\epsilon^2) \\ \delta &= 3 + \epsilon + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (6.70)$$

Dabei benötigt man bis zur Ordnung $O(\epsilon)$ nur das Resultat für ν und $\eta = 0$. Die anderen Exponenten folgen dann mit den Skalengesetzen. Für $d = 3$ ($\epsilon = 1$) und $n = 1$ (Ising-Modell oder van der Waals-Fluid) erhält man $\alpha = 1/6$, $\beta = 1/3$, $\gamma = 7/6$, $\delta = 4$. Diese Werte stimmen schon ganz gut mit den experimentellen Werten überein, jedenfalls viel besser als die der Molekularfeld-Theorie. Für ein System mit $d = 3$ und $n = 3$ (z. B. Heisenberg-Ferromagnet) findet man $\alpha = 0.045$, $\beta = 0.364$, $\gamma = 1.227$, $\delta = 4$. Diese Resultate haben dazu geführt, dass man von „Universaltätsklassen“ spricht, die durch gleiche Werte von d und n definiert sind. Systeme mögen in den physikalischen Details sehr unterschiedlich sein, solange die Werte von

(d, n) dieselben sind, haben sie die gleichen kritischen Indizes. Unterscheiden können sie sich allerdings in der Breite der Bereiche um den kritischen Punkt, in denen diese Exponenten sichtbar werden: je langreichweitiger die Wechselwirkung ist, desto enger der kritische Bereich. Deshalb ist etwa bei Supraleitern, in denen die Ausdehnung der Cooper-Paare hunderte von Nanometern beträgt, der eigentlich kritische Bereich fast unmessbar klein; man sieht hauptsächlich das von der Molekularfeld-Theorie vorhergesagte Verhalten. (Hier greift das sog. Ginzburg-Kriterium, das den kritischen Bereich als denjenigen definiert, in dem die von den Fluktuationen herrührende spezifische Wärme vergleichbar oder größer ist als der Sprung, den man bereits ohne Fluktuationen hat.)