Φ
HB

Theoretische Physik II: Elektrodynamik
C.C. Noack

Lorentzgruppen-Fibel

Für: Bedürfnisse der relativistischen Mechanik und Elektrodynamik

Ziel: Mit Hilfe der anschaulich-physikalischen Parametrisierung der Lorentz-Gruppe die innere mathematische Struktur dieser Gruppe auch physikalisch verständlich machen (einschließlich der diskreten Lorentz-Symmetrien *Parität* und *Zeitumkehr*)

Voraussetzungen:
Grundbegriffe der Tensoranalysis, elementare Kenntnisse in der Gruppentheorie

[Vers. 3.1/ccn 21. Januar 1998]

Inhaltsverzeichnis

Notation

Um auch bei den Lorentz-Transformationen zwischen den 4 Zeit-Raum-Koordinaten und den 3 rein räumlichen Koordinaten underscheiden zu können, wird vereinbart:

a) *lateinische* Indices laufen über die räumlichen Koordinaten:
$$k = 1, 2, 3$$

b) *griechische* Indices laufen über die zeitlichen *und* die räumlichen Koordinaten:
$$\mu = 0, 1, 2, 3 \quad .$$

Diese Vereinbarung ist in der physikalischen Literatur weit verbreitet. Wir setzen weiterhin immer (pseudo-)kartesische[1] Koordinaten voraus, d.h. das vierdimensionale Linienelement ds ist gegeben durch

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \qquad \text{mit } g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Es wird immer die Einstein-sche Summationskonvention benutzt.

[1]Diese Einschränkung bedeutet, daß wir uns in diesem Skript *nur* mit der sogen. **Speziellen** Relativitätstheorie beschäftigen können — Fragen der **Allgemeinen** Relativitätstheorie (Gravitationstheorie) bleiben also ausgeklammert.

1 Lorentz-Transformationen

Wir betrachten diejenigen (linearen) Koordinatentransformationen Λ, die das Linienelement ds invariant lassen:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \qquad \text{mit} \qquad dx'^{\mu}\, dx'_{\mu} \stackrel{!}{=} dx^{\mu}\, dx_{\mu} \quad .$$

Die Matrizen Λ müssen also der Bedingung

$$\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\, \Lambda_{\nu}{}^{\sigma} \stackrel{!}{=} \delta^{\mu}{}_{\nu} \tag{1}$$

genügen. Die Menge dieser Matrizen bildet eine *Gruppe*, die Gruppe der *Lorentz-Transformationen*, $\mathcal{L}$. Der Beweis der Gruppeneigenschaft geschieht durch Nachprüfen der vier Gruppenaxiome [2]:

1. je zwei Elementen $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ ist ein eindeutig bestimmtes $g \in \mathcal{G}$ zugeordnet [*Verknüpfungs-* oder 'Multiplikations'-Gesetz] ,
2. es existiert ein *Einselement* $\mathbb{1}$ mit der Eigenschaft $\mathbb{1} \circ g = g \circ \mathbb{1} \qquad \forall\, g \in \mathcal{G}$,
3. $\forall\, g \in \mathcal{G}$ existiert ein *Inverses* $g^{-1} \in \mathcal{G}$ mit der Eigenschaft $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = \mathbb{1}$,
4. $\forall\, g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$ gilt das *Assoziativgesetz*

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3 \in \mathcal{G} \quad .$$

In unserem Fall haben wir natürlich als Gruppenverknüpfung die Matrixmultiplikation bzw. das "hintereinander-ausführen" zweier Lorentz-Transformationen.

Zur Aufklärung der inneren Struktur dieser Gruppe untersuchen wir zunächst zwei spezielle Fälle:

a) rein räumliche Transformationen:

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathsf{R} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \text{mit } \mathsf{R}^{i}{}_{m}\, \mathsf{R}_{k}{}^{m} = \delta^{i}{}_{k} \quad , \tag{2}$$

b) sogenannte 'reine' Lorentz-Transformationen; das sind Lorentz-Transformationen ohne Drehungen des Koordinatensystems[3].

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir die Bedingung (1) noch etwas anders schreiben, nämlich in Form einer gewöhnlichen Matrixgleichung, was im Abschn. **3** nützlich sein wird. Dazu schreiben wir zunächst die Lorentz-Matrizen mit kovarianten Indizes ("Index-ziehen" mit Hilfe des Minkowski-Tensors $\eta_{\mu\nu}$):

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mu}{}_{\sigma} &= \eta^{\mu\rho}\, \Lambda_{\rho\sigma} \quad , \\ \Lambda_{\nu}{}^{\sigma} &= \Lambda_{\nu\tau}\, \eta^{\tau\sigma} \quad . \end{aligned}$$

[2]Gilt zusätzlich $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1 \quad \forall\, g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, so nennt man die Gruppe "Abel-sch" oder "kommutativ". Die Lorentz-Gruppe ist *nicht* kommutativ.

[3]Genaueres s. Abschn. **4** .

Multipliziert man (1) insgesamt mit $\eta_{\alpha\mu}$, so erhält man nach leichter Rechnung (und einigen Index-Umbenennungen)

$$\Lambda_{\mu\rho}\,\eta^{\rho\sigma}\,\Lambda_{\nu\sigma} = \eta_{\mu\nu} \quad ,$$

was man in Matrixform auch einfach als

$$\Lambda\,\eta\,\Lambda^{\mathsf{T}} = \eta \tag{3}$$

schreiben kann. Man erkennt deutlich, daß die Bedingung (3) 'fast' wie eine Orthogonalitätsbedingung (im Vierdimensionalen) aussieht; sie unterscheidet sich nur in den durch den Minkowski-Tensor $\eta_{\mu\nu}$ erzeugten Vorzeichen.

2 Räumliche Transformationen ("Drehungen")

Die räumlichen Transformationen bilden offenbar eine *Untergruppe* der Lorentz-Gruppe, die sogenannte *Drehgruppe*: zwei aufeinanderfolgende Drehungen sind wieder eine Drehung (Beweis nahezu trivial). In den räumlichen Koordinaten ist die Metrik Euklidisch, so daß die Unterscheidung zwischen kontravarianten und kovarianten Vektoren akademisch wird, d.h. wir haben:

$$(ds)^2 = c^2 dt^2 - (d\vec{r}\,)^2 \quad , \quad (d\vec{r}\,)^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k \qquad\qquad \text{mit } g = 1\!\!1 \quad .$$

Die Invarianzbedingung der Lorentz-Gruppe wird dann einfach zu $\mathsf{R}^{\mathsf{T}}\mathsf{R} = 1\!\!1$, d.h. sowohl die Zeilenvektoren wie auch die Spaltenvektoren von R sind paarweise orthogonal. Daher wird die Drehgruppe auch als O_3 bezeichnet: "Gruppe der orthogonalen Matrizen in 3 Dimensionen".

Aus $\mathsf{R}^{\mathsf{T}}\mathsf{R} = 1\!\!1$ folgt $(\det \mathsf{R})^2 = 1$, d.h. $\det \mathsf{R} = \pm 1$. Die Drehgruppe besteht also aus zwei "Stücken", mit ${O_3}^+$ bzw. ${O_3}^-$ bezeichnet[4]:

$$\det \mathsf{R} = \pm 1, \qquad \text{wenn} \qquad \mathsf{R} \in {O_3}^{\pm} \quad .$$

Diese beiden Stücke *hängen nicht zusammen*, das heißt: eine Matrix R mit $\det \mathsf{R} = -1$ läßt sich *nicht* durch eine stetige Änderung ihrer Parameter in eine Matrix mit $\det \mathsf{R} = +1$ verwandeln. Das folgt einfach aus der Tatsache, daß die Determinante einer Matrix eine stetige Funktion der Matrixelemente R_{ik} ist.

Anschaulich sind die $\mathsf{R} \in {O_3}^+$ reine *Drehungen* des Koordinatensystems, während die $\mathsf{R} \in {O_3}^-$ zusätzlich eine Spiegelung enthalten (d.h. sie beschreiben eine Drehung und zugleich den Übergang von einem rechtshändigen zu einem linkshändigen Koordinatensystem). Alle Elemente $\mathsf{R} \in {O_3}^-$ lassen sich (*eindeutig*) schreiben als Produkt einer eigentlichen Drehung mit irgendeiner fest herausgegriffenen Spiegelung: sei $\mathsf{S} \in {O_3}^-$ vorgegeben, so ist $\mathsf{R} = \mathsf{R} \circ \mathsf{S}^{-1} \circ \mathsf{S}$, und $(\mathsf{R} \circ \mathsf{S}^{-1}) \in {O_3}^+$. ${O_3}^-$ enthält also insgesamt die *gleichen Elemente* wie ${O_3}^+$, nur mit einer Spiegelung versehen. Es genügt deshalb, ${O_3}^+$ näher zu untersuchen.

Die Bedingung $\mathsf{R}^{\mathsf{T}}\mathsf{R} = 1\!\!1$ stellt 6 unabhängige Gleichungen zwischen den 9 (reellen) Elementen der Matrix R dar. Das bedeutet, daß die Drehmatrizen insgesamt nur von 3 (reellen) Parametern abhängen: jeder Matrix, die der Orthogonalitätsbedingung genügt, entspricht umkehrbar eindeutig ein Satz von 3 reellen Parametern (dazu der – diskrete – Wert der Determinante). Als geeignete Parameter wählt man zweckmäßig solche Größen, die geometrisch

[4] ${O_3}^+$ heißt in der Literatur auch oft SO_3, die "spezielle orthogonale Gruppe". Noch ein anderer gebräuchlicher Name ist "eigentliche Drehgruppe" .

einfach zu interpretieren sind. Ein solches System sind die sogenannten "Euler-Winkel" [5]. Ein anderes Parametersystem erhält man, wenn man die – anschaulich einsichtige – Tatsache benutzt, daß jede räumliche Drehung durch Angabe einer *Drehachse* und eines *Drehwinkels* um diese Achse festgelegt ist. Das wollen wir jetzt im einzelnen näher verfolgen.

Wir schreiben dazu die Transformation in der Form

$$\vec{r}\,' = \mathsf{R}(\vec{r}\,) \quad ,$$

und nehmen dabei an, daß R von einem festen Vektor $\vec{n}$ (normiert zu $\vec{n}^{\,2} = 1$) abhängt. Nach Voraussetzung muß $\mathsf{R}(\vec{r}\,)$ außerdem *linear* in $\vec{r}$ sein. Der allgemeinste Vektor
[$\vec{r}\,'$ muß ja wieder ein Vektor sein!], der in $\vec{r}$ linear ist, ist offenbar[6]

$$\vec{r}\,' = a \cdot \vec{r} + b \cdot (\vec{r} \cdot \vec{n}\,)\,\vec{n} + c \cdot (\vec{n} \times \vec{r}\,)$$

mit konstanten Koeffizienten a, b, c .

Die Orthogonalitätsbedingung ist nichts anderes als die Bedingung $(\vec{r}\,')^2 \stackrel{!}{=} (\vec{r}\,)^2$. Es folgt also $[\,(\vec{x} \times \vec{y}\,)^2 \equiv \vec{x}^{\,2} \cdot \vec{y}^{\,2} - (\vec{x} \cdot \vec{y}\,)^2\,]$

$$[a\vec{r} + b(\vec{r} \cdot \vec{n}\,)\vec{n} + c(\vec{n} \times \vec{r}\,)]^2 = a^2 r^2 + b^2 (\vec{r} \cdot \vec{n}\,)^2 + c^2 \left[r^2 - (\vec{r} \cdot \vec{n}\,)^2 \right] + 2ab\,(\vec{r} \cdot \vec{n}\,)^2 \stackrel{!}{=} r^2$$

$\hookrightarrow$

$$a^2 + c^2 = 1 \qquad\qquad b^2 + 2ab - c^2 = (a+b)^2 - a^2 - c^2 = 0$$

$\hookrightarrow$

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= 1 \quad , && (4) \\ (a+b)^2 &= 1 \quad . && (5) \end{aligned}$$

Diesen beiden Gleichungen müssen also die Koeffizienten a, b, c genügen, damit R orthogonal wird. Es bleibt wie erwartet *ein* reeller Parameter ($\vec{n}$ hat wegen $\vec{n}^{\,2} = 1$ nur zwei unabhängige Parameter).

Die Gleichung (5) hat zwei Lösungen: $a + b = \alpha$ mit $\alpha = \pm 1$.

Das Einselement der Drehgruppe ist offenbar durch $a = 1, b = c = 0$ gegeben. Es liegt in ${O_3}^+$. Daraus und aus den oben angestellten Stetigkeitsüberlegungen folgt also

$$\mathsf{R} \in {O_3}^{\pm} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \pm 1 \quad .$$

Wegen (4) kann man setzen

$$a = \cos\varphi \quad , \qquad c = \sin\varphi \quad .$$

Das hierbei im Prinzip willkürliche Vorzeichen von φ ist dabei so gewählt, daß $\varphi > 0$ einer *Rechtsdrehung* mit dem Winkel φ um die Drehachse $\vec{n}$ entspricht.

Wir haben so schließlich als vollständige Parametrisierung der orthogonalen Matrizen durch Drehachse $\vec{n}$ und Drehwinkel φ :

---

[5] Zu ihrer genauen Definition siehe z.B. H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2.Auflage.

[6] Damit $\vec{r}\,'$ wie $\vec{r}$ ein *polarer* Vektor wird, muß $\vec{n}$ ein *axialer* Vektor sein, wie das auch seiner anschaulichen Interpretation als Drehachse entspricht.

$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r}\cdot\cos\varphi + (\vec{n}\cdot\vec{r}\,)\cdot\vec{n}\cdot(\alpha-\cos\varphi) + (\vec{n}\times\vec{r}\,)\cdot\sin\varphi} \quad .$$

Obigen Ausdruck kann man natürlich in kartesischen Koordinaten ausschreiben und erhält dann direkt die orthogonale Matrix R. Z.B. hat man für $\vec{n} = \vec{e}_z$ die üblichen Drehformeln:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' &= \alpha\cdot z \quad . \end{aligned}$$

Die Parametrisierung ist nach Konstruktion eindeutig, wenn φ im Intervall $0 \le \varphi < \pi$ liegt.

Speziell für $\alpha = -1, \varphi = \pi$ hat man die Matrix ("Paritätsumkehr")

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

die einer Spiegelung am Ursprung entspricht: $\vec{r}\,' = -\vec{r}$. Es ist $\mathsf{P}^2 = \mathbb{1}$; die beiden Matrizen $\mathbb{1}$ und P bilden also ihrerseits eine (diskrete) Untergruppe von O_3 , wie auch die $\mathsf{R} \in {O_3}^+$ eine (kontinuierliche) Untergruppe bilden. Jedes $\mathsf{R} \in O_3$ läßt sich schreiben als Produkt $\mathsf{R} = \hat{\mathsf{R}} \circ \mathsf{X}$ mit $\hat{\mathsf{R}} \in {O_3}^+, \;\; \mathsf{X} \in \{\mathbb{1}, \mathsf{P}\}$; überdies gilt für alle $\mathsf{R} \in O_3 \,:\; \mathsf{R}\cdot\mathsf{P} = \mathsf{P}\cdot\mathsf{R}$. In einem solchen Fall, in dem zwei Gruppen einfach 'multiplikativ' zu einer größeren Gruppe verbunden sind, spricht man von einem *direkten Produkt* der beiden Gruppen, in Formeln:

$$O_3 = {O_3}^+ \otimes \{\mathbb{1}, \mathsf{P}\} \quad .$$

Der hier aufgetretene Sachverhalt ist allgemein (und wird bei der vollen Lorentz-Gruppe wiederkehren): besteht eine Gruppe von (ansonsten stetigen) Transformationen aus mehreren unzusammenhängenden Stücken, so läßt sie sich schreiben als direktes Produkt des mit der $\mathbb{1}$ zusammenhängenden Teils mit einer *diskreten* Gruppe (die gerade so viele Elemente hat wie die Ausgangsgruppe Stücke).

Ein Beweis dieses Satzes sprengt den Rahmen dieses Skripts.

3 Die Stücke der Lorentz-Gruppe

Welche Stücke hat die Lorentz-Gruppe?

Zunächst folgt aus $\Lambda\,\eta\,\Lambda^{\mathsf{T}} = \eta$ (Gl. 3), daß

$$(\det\Lambda)^2\cdot\det\eta = \det\eta \quad ,$$

also

$$\det\Lambda = \pm 1 \quad .$$

Für die Untergruppe der räumlichen Drehungen gilt auch im Vierdimensionalen $\det\mathsf{R} = \det\Lambda$ [vgl. Abschn. 2]; die Determinante bestimmt also offenbar wieder den Unterschied zwischen Transformationen mit und ohne (räumliche) Spiegelungen. Daß es aber noch eine *zweite* diskrete Transformation gibt, sieht man so: man betrachte die Gleichung $\Lambda_{\mu\rho}\,\eta^{\rho\sigma}\,\Lambda_{\nu\sigma} = \eta_{\mu\nu}$ für $\mu = \nu = 0$:

$$(\Lambda_{00})^2 - \sum_{k=1}^{3}(\Lambda_{0k})^2 = 1 \quad , \tag{6}$$

woraus folgt

$$(\Lambda_{00})^2 \geq 1 \quad ,$$

da die $\Lambda_{\mu\nu}$ alle reelle Zahlen sind. Es folgt

$$\Lambda_{00} \geq +1 \qquad \text{oder} \qquad \Lambda_{00} \leq -1 \quad .$$

Diese beiden Fälle lassen sich wieder nicht durch stetige Änderung der Parameter ineinander überführen. Folglich gibt es (mindestens) *vier* Stücke, für die die folgende Notation üblich ist:

Λ_{00} \ $\det\Lambda$	$+1$	-1
$\geq +1$	$\mathcal{L}_+{}^\uparrow$	$\mathcal{L}_-{}^\uparrow$
≤ -1	$\mathcal{L}_+{}^\downarrow$	$\mathcal{L}_-{}^\downarrow$

.

Ein spezielles Element in $\mathcal{L}_-{}^\downarrow$ ist die *Zeitumkehr*:

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad [\,\text{es gilt} \quad \mathsf{T}^2 = \mathbb{1}\,] \quad ,$$

während die Paritätsumkehr im Vierdimensionalen die Form

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \qquad [\,\text{es gilt} \quad \mathsf{P}^2 = \mathbb{1}\,]$$

hat (und in $\mathcal{L}_-{}^\uparrow$ liegt). Es gilt also [beachte $\mathsf{PT} = \mathsf{TP}$]

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1} & \in & \mathcal{L}_+{}^\uparrow \\ \mathsf{P} & \in & \mathcal{L}_-{}^\uparrow \\ \mathsf{T} & \in & \mathcal{L}_-{}^\downarrow \\ \mathsf{PT} & \in & \mathcal{L}_+{}^\downarrow \quad . \end{array}$$

Die vier Elemente $\{\mathbb{1},\mathsf{P},\mathsf{T},\mathsf{PT}\}$ sind Elemente der vollen Lorentz-Gruppe; sie bilden eine diskrete Untergruppe (die ihrerseits wieder als direktes Produkt aus den beiden durch Paritäts- bzw. Zeitumkehr erzeugten Untergruppen dargestellt werden kann). Die Lorentz-Gruppe kann man also insgesamt schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_+{}^\uparrow \otimes \{\mathbb{1},\mathsf{P},\mathsf{T},\mathsf{PT}\} \\ &= \mathcal{L}_+{}^\uparrow \otimes \{\mathbb{1},\mathsf{P}\} \otimes \{\mathbb{1},\mathsf{T}\} \quad . \end{aligned}$$

Ist $\mathcal{L}_+{}^\uparrow$ *zusammenhängend*, zerfällt also nicht weiter in unzusammenhängende Stücke[7], so kann die weitere Untersuchung wieder auf $\mathcal{L}_+{}^\uparrow$ (die sogenannten "eigentlichen" Lorentz-Transformationen) beschränkt werden.

Nach Entdeckung der (speziellen) Relativitätstheorie, die besagt, daß die physikalischen Gesetze invariant gegenüber *eigentlichen* Lorentz-Transformationen sind, hatte man es zunächst für 'evident' gehalten, daß diese Invarianz für *alle* Lorentz-Transformationen einschließlich der diskreten Transformationen gilt. In Worten: "die Natur unterscheidet nicht

[7]Dies wird im Anhang bewiesen.

zwischen 'rechts' und 'links' ", und "die mechanischen[8] Gesetze unterscheiden nicht zwischen Vergangenheit und Zukunft". Beide Aussagen haben sich in neuerer Zeit als *grundsätzlich falsch* erwiesen: die Paritätsinvarianz ist im β-Zerfall [1957, Nobelpreis 1958], die Zeitumkehrinvarianz für die neutralen k-Mesonen [1964, Nobelpreis 1980] verletzt. Die "richtige" Invarianzgruppe der Physik ist also $\mathcal{L}_+{}^{\uparrow}$, und *nicht* $\mathcal{L}$! Caveat emptor!

4 Die 'reinen' Lorentz-Transformationen

Eine Lorentz-Transformationsmatrix Λ hat 4×4 Elemente; die Gleichungen (1) stellen 10 unabhängige Bedingungen dar, es bleiben also *sechs* (reelle) Parameter.

Da die (durch 3 Parameter bestimmten) räumlichen Rotationen eine Untergruppe bilden, bleiben zur Parametrisierung der vollen (eigentlichen) Lorentz-Gruppe offenbar noch *drei* näher zu bestimmende Parameter. Wir wollen die Parametrisierung in einer zur Drehgruppe analogen Weise vornehmen, indem wir für zwei der Parameter zunächst eine feste (räumliche) Achse $\vec{m}$ [mit $\vec{m}^{\,2} = 1$] vorgeben. Wir erhalten, wenn wir wieder beachten, daß $x'^{\mu} = (ct', \vec{r}\,')$ linear von $x^{\mu} = (ct, \vec{r}\,)$ abhängen muß, als allgemeinsten Ausdruck für die Transformation[9] [A, B, C, D, E sind konstante Koeffizienten]

$$\begin{aligned} x'^{0} &= A \cdot x^0 + B \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r}\,) && (7) \\ \vec{r}\,' &= C \cdot \vec{r} + D \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r}\,)\vec{m} + E \cdot x^0 \cdot \vec{m} \quad . && (8) \end{aligned}$$

Dabei sind Terme proportional $(\vec{m} \times \vec{r}\,)$ zunächst weggelassen, weil aus den Erfahrungen bei O_3 zu erwarten ist, daß sie auf räumliche Drehungen führen, wir uns zunächst aber auf 'reine' Lorentz-Transformationen beschränken wollen. Inwiefern wir mit dieser Parametrisierung wirklich *alle* 4×4-Matrizen erhalten, die der Bedingung (1) genügen (ja: ob die so definierte Matrizenmenge überhaupt eine *Untergruppe* bildet), bleibt dabei allerdings zunächst offen[10].

Die Bedingung für Lorentz-Invarianz ist

$$(x'^{0})^2 - (\vec{r}\,')^2 \stackrel{!}{=} (x^0)^2 - (\vec{r}\,)^2 \quad ;$$

ausgeschrieben ergibt sich

$$\begin{aligned} & A^2(x^0)^2 + B^2(\vec{m} \cdot \vec{r}\,)^2 + 2ABx^0(\vec{m} \cdot \vec{r}\,) - C^2 r^2 - D^2(\vec{m} \cdot \vec{r}\,)^2 - E^2(x^0)^2 \\ & \quad -2CD(\vec{m} \cdot \vec{r}\,)^2 - 2CEx^0(\vec{m} \cdot \vec{r}\,) - 2DEx^0(\vec{m} \cdot \vec{r}\,) \\ \stackrel{!}{=} \; & (x^0)^2 - (\vec{r}\,)^2 \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$

$$\begin{aligned} A^2 - E^2 &= 1 \\ C^2 &= 1 \\ B^2 - D^2 - 2CD &= 0 \\ AB - CE - DE &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Das sind 4 Bedingungen für die 5 Konstanten A, B, C, D, E ; es bleibt also wie erwartet *ein* Parameter (neben $\vec{m}$). Weitere Umformung ergibt

$$(C + D)^2 = B^2 + C^2 = B^2 + 1$$

[8] Die *Wahrscheinlichkeits*aussagen des 2.Hauptsatzes der Thermodynamik liegen auf einer anderen Ebene.

[9] Hier liest man ab, daß $\vec{m}$ – im Gegensatz zur Drehachse $\vec{n}$ – ein *polarer* Vektor sein muß.

[10] Näheres hierzu im Anhang.

und

$$A^2B^2 = E^2(C+D)^2 = E^2(B^2+1) \quad \hookrightarrow \quad (A^2-E^2)B^2 = E^2 \quad \hookrightarrow \quad E^2 = B^2 \quad .$$

Wir setzen nun

$$E =: \delta\, B \quad , \qquad C =: \delta\varepsilon$$

und erhalten

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= 1 \\ D &= \delta \cdot (A - \varepsilon) \\ \delta &= \pm 1 \\ \varepsilon &= \pm 1 \quad . \end{aligned}$$

Die 4 Vorzeichenkombinationen von δ, ε entsprechen offenbar gerade den 4 Stücken der Lorentz-Gruppe: aus der Betrachtung von (bereits oben diskutierten) Spezialfällen mit $B = D = E = 0$ erhält man

$$\begin{array}{lllll} \mathcal{L}_+{}^\uparrow : & \Lambda = 1\!\!1 & & A=+1 \quad C=+1 & & \delta=+1 \quad \varepsilon=+1 \\ \mathcal{L}_-{}^\uparrow : & \Lambda = \mathsf{P} & & A=+1 \quad C=-1 & & \delta=-1 \quad \varepsilon=+1 \\ & & \hookrightarrow & & \hookrightarrow & \\ \mathcal{L}_-{}^\downarrow : & \Lambda = \mathsf{T} & & A=-1 \quad C=+1 & & \delta=+1 \quad \varepsilon=-1 \\ \mathcal{L}_+{}^\downarrow : & \Lambda = \mathsf{PT} & & A=-1 \quad C=-1 & & \delta=-1 \quad \varepsilon=-1 \quad . \end{array}$$

Für alle 4 Stücke gilt $A\varepsilon > 0$, d.h. $A = \varepsilon \cdot |A|$.

Damit sind die 4 Vorzeichenkombinationen den 4 Stücken der Lorentz-Gruppe eineindeutig zugeordnet.

Wir fahren nun in der Parametrisierung analog zur O_3 fort und schreiben[11] [beachte, daß $\cosh y \geq 1 \;\; \forall\, y \in \mathbb{R}$]

$$A = \varepsilon \cosh y \qquad B = -\sinh y \quad , \quad 0 \leq y < \infty \quad .$$

Die Vorzeichenwahl in B ist im Prinzip wieder willkürlich; sie legt, zusammen mit der Achsenrichtung $\vec{m}$, die geometrisch-physikalische Bedeutung von y fest [vgl. Abschn. **5**].

Wir erhalten so schließlich für die 'reinen' Lorentz-Transformationen [$x^0 = ct$]

$$\boxed{\begin{aligned} x'^{\,0} = ct' &= \varepsilon \cdot \cosh y \cdot x^0 - \sinh y \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r}\,) \\ \vec{r}\,' &= \delta\varepsilon \cdot \vec{r} + \delta\varepsilon \cdot (\cosh y - 1)\,(\vec{m} \cdot \vec{r}\,) \cdot \vec{m} - \delta \sinh y \cdot x^0 \cdot \vec{m} \end{aligned}} \quad . \tag{9}$$

Daß die so beschriebenen Lorentz-Transformationen (bei festem δ, ε) stetig ineinander überführbar sind, geht aus der Konstruktion hervor. Die Frage, welcher Teil von $\mathcal{L}_+{}^\uparrow$ (bzw. der anderen Stücke) durch obige Parametrisierung beschrieben wird, stellen wir noch einmal zurück [12].

[11] Der Buchstabe y steht hier für den Parameter der betrachteten Lorentz-Transformation; er hat nichts zu tun mit einer räumlichen y-Koordinate!
Diese Wahl des Buchstabens y für die "Rapidität" ist – trotz der möglichen Verwechslung – allgemein üblich. Siehe dazu Abschn. **5**.

[12] Vgl. Anhang.

5 Physikalische Bedeutung der ‘reinen’ Lorentz-Transformationen

Wir betrachten wieder den Spezialfall $\vec{m} = \vec{e}_z$ (und $\delta = \varepsilon = +1$) und erhalten $[\, x^0 \equiv ct \ , \ x^3 \equiv z \,]$ [13]

$$\begin{aligned} ct' &= +ct \cdot \cosh y - z \cdot \sinh y \\ z' &= -ct \cdot \sinh y + z \cdot \cosh y \end{aligned}$$

Beachte die Analogie zur Drehgruppe!

Wie transformiert sich der räumliche Koordinatenursprung? Im ungestrichenen System ist $x^\mu = (ct, \vec{0}\,)$; im gestrichenen haben wir

$$\begin{aligned} ct' &= +ct \cdot \cosh y \\ z' &= -ct \cdot \sinh y \quad . \end{aligned}$$

Es folgt

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)' = \frac{dz'}{dt'} = -c \tanh y$$

für die Geschwindigkeit des ungestrichenen Ursprungs, wie sie im gestrichenen System gemessen wird. Ist umgekehrt der *gestrichene Ursprung* in Ruhe: $x^{\mu\,\prime} = (ct', \vec{0}\,)$, so folgt

$$\begin{aligned} ct' &= +ct \cdot \cosh y - z \cdot \sinh y \\ 0 &= -ct \cdot \sinh y + z \cdot \cosh y \end{aligned}$$

und daraus $\dfrac{dz}{dt} = +c \tanh y$ für die Geschwindigkeit des gestrichenen Ursprungs im ungestrichenen Koordinatensystem.

Die sogenannten ‘reinen’ Lorentz-Transformationen beschreiben also Transformationen zwischen Koordinatensystemen, die sich mit konstanter Relativgeschwindigkeit

$$\vec{v} = c \tanh y \cdot \vec{m}$$

gegeneinander bewegen. Sie treten an die Stelle der klassischen Galilei-Transformationen

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \vec{r}\,' &= \vec{r} - \vec{v} \cdot t \quad . \end{aligned}$$

Im Englischen nennt man eine ‘reine’ Lorentz-Transformationen auch “a Lorentz boost” (wörtlich etwa: eine “Lorentz-Anschiebung”), weil durch die Transformation das Koordinatensystem auf eine vorgegebene Geschwindigkeit gebracht wird.

Man benutzt üblicherweise zwei Abkürzungssymbole:

$$\begin{aligned} \beta &:= \tanh y = \frac{v}{c} \\ \gamma &:= \cosh y = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

$[$ es gilt $\sinh y = \beta\gamma$, sowie die Identität $\gamma^2 \cdot (1-\beta^2) = 1\,]$.

[13] Die beiden anderen räumlichen Koordinaten x^1, x^2 bleiben in allen weiteren Betrachtungen dieses Abschnitts unverändert; wir lassen sie deshalb ab jetzt ganz weg.

Damit schreiben sich die Transformationsgleichungen (für eine vorgegebene 'boost'-Achse $\vec{m}$)

$$\boxed{\begin{array}{rcl} ct' &=& \gamma \cdot [\varepsilon(ct) - \beta \cdot (\vec{m} \cdot \vec{r})] \\ \vec{r}' &=& \delta\varepsilon \cdot \vec{r} + \delta\varepsilon \cdot (\gamma - 1)\,(\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{m} - \delta \cdot \gamma\beta \cdot (ct)\vec{m} \end{array}} \quad .$$

Was geschieht, wenn wir *zwei* Lorentz-Transformationen (längs der gleichen boost-Achse $\vec{m}$) hintereinander ausführen?

$$S \underset{\vec{v}_1}{\longrightarrow} S' \underset{\vec{v}_2}{\longrightarrow} S'' \quad , \qquad S \underset{\vec{v}\,?}{\longrightarrow} S'' \quad .$$

Der Einfachheit halber legen wir wieder $\vec{m} = \vec{e}_z$. Dann ist

$$\begin{array}{rclcrcl} ct' &=& +ct \cdot \cosh y_1 - z \cdot \sinh y_1 & \qquad & ct'' &=& +(ct') \cdot \cosh y_2 - z' \cdot \sinh y_2 \\ z' &=& -ct \cdot \sinh y_1 + z \cdot \cosh y_1 & & z'' &=& -(ct') \cdot \sinh y_2 + z' \cdot \cosh y_2 \end{array}$$

$\hookrightarrow$

$$\begin{array}{rcl} ct'' &=& +(ct)\,[\cosh y_1 \cosh y_2 + \sinh y_1 \sinh y_2] - z\,[\sinh y_1 \cosh y_2 + \cosh y_1 \sinh y_2] \\ z'' &=& -(ct)\,[\sinh y_1 \cosh y_2 + \cosh y_1 \sinh y_2] + z\,[\cosh y_1 \cosh y_2 + \sinh y_1 \sinh y_2] \quad . \end{array}$$

Mit den Additionstheoremen für die Hyperbelfunktionen sinh und cosh ergibt sich für die zusammengesetzte Transformation

$$\cosh y = cosh(y_1 + y_2) \quad , \qquad \sinh y = sinh(y_1 + y_2) \quad ,$$

also

$$\boxed{y = y_1 + y_2} \quad .$$

In β umgerechnet ist das

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \cdot \beta_2} \quad . \tag{10}$$

Es addieren sich also *nicht* die (wie üblich definierten) Geschwindigkeiten, wie in der klassischen Galilei-Transformation! Gl. (10) wird oft als "das relativistische Additionsgesetz der Geschwindigkeiten" bezeichnet.

Man sieht aber, daß im Grunde die Größe y, die, im Gegensatz zu den Geschwindigkeiten, dem einfachen und naiv erwarteten Additionsgesetz $y = y_1 + y_2$ genügt, das in praktischen Rechnungen bequemere und auch physikalisch angemessenere Maß [14] für die Geschwindigkeit ist als v . Um Verwechslungen zu vermeiden, nennt man y die *Rapidität* (englisch: 'rapidity'), im Unterschied zur 'Velozität' (englisch: 'velocity') [15]. Invertiert man $\beta = \tanh y$, so erhält man

$$y = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad ; \qquad 0 \le y < \infty \quad \text{, wenn } 0 \le \beta < 1 \quad .$$

[14] Hat z.B. ein Teilchen in einem gegebenen Bezugssystem die Energie E und den Impuls $\vec{p}$, so ist seine Rapidität (in Richtung des Impulses) gegeben durch

$$y = \log \sqrt{\frac{E}{E - c|\vec{p}|}} \quad .$$

[15] Beide Wörter sind lateinisch und heißen auf Deutsch dasselbe, nämlich 'Geschwindigkeit'.

Die Rapidität wächst also beim Beschleunigen, im Gegensatz zur nichtrelativistischen Geschwindigkeit, die dem Grenzwert c zustrebt, immer weiter an. Auch deshalb ist die Rapidität y der bequemere und der physikalischen Anschauung besser entsprechende Geschwindigkeitsbegriff.

Für kleine Geschwindigkeiten fallen beide Begriffe zusammen:

$$v = c \cdot \tanh y \underset{y \to 0}{\Longrightarrow} c \cdot y \quad .$$

Sind die beiden zu addierenden Rapiditäten *nicht* längs der gleichen boost-Achse, so gilt die einfache Additivität nicht mehr [16]. Das Nacheinander-ausführen zweier reiner Lorentz-Transformationen längs verschiedener 'boost'-Achsen ergibt überhaupt keine reine Lorentz-Transformation, sondern bewirkt zusätzlich eine *räumliche Drehung* des Koordinatensystems [17]. Dies führt zu bemerkenswerten physikalischen Effekten (z.B. zur sogenannten "Thomas-Präzession"). Das liegt einfach daran, daß die Lorentz-Gruppe – wie schon die Drehgruppe! – *nicht kommutativ* ist, d.h. im allgemeinen ist

$$\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \neq \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \quad .$$

[16] Auch hier wird die Analogie zur Drehgruppe deutlich: die Drehwinkel von zwei nacheinander ausgeführten Drehungen um *verschiedene Drehachsen* addieren sich *nicht!*

[17] Näheres vgl. Anhang.

Anhang: Vollständigkeit der Parametrisierung, Zusammenhang der eigentlichen Lorentz-Gruppe

Wie bei der Diskussion der Geschwindigkeitsaddition in Abschn. **5** schon erwähnt wurde, bildet die Menge aller reinen Lorentz-Transformationen keine Untergruppe. Da die Elemente von $\mathcal{L}_+{}^\uparrow$ durch insgesamt 6 Parameter bestimmt sind, von denen wir 3 als Drehparameter (für die Untergruppe $O_3{}^+$ der räumlichen Drehungen) und 3 als boost-Parameter (für die Untermenge der reinen Lorentz-Transformationen) identifiziert haben, ist jedoch zu vermuten, daß jedes $\Lambda \in \mathcal{L}_+{}^\uparrow$ sich als *Produkt einer Drehung mit einem boost* wird schreiben lassen.

Dies soll nun bewiesen werden.

Gegeben sei also $\Lambda \in \mathcal{L}_+{}^\uparrow$. Wir setzen an

$$\Lambda = \tilde{\Lambda} \circ \mathsf{R} \quad ,$$

und suchen $\tilde{\Lambda}$ als eine *reine* Lorentz-Transformation so zu bestimmen, daß R eine räumliche Drehung wird:

$$\mathsf{R} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathsf{R}_{ik} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad .$$

Dann ist $\mathsf{R} = \tilde{\Lambda}^{-1} \circ \Lambda$. Stellt sich heraus, daß $\tilde{\Lambda}$ durch diese Forderung *eindeutig bestimmt* ist, so haben wir zugleich die Eindeutigkeit der Parametrisierung bewiesen; denn daß eine gegebene Drehmatrix [hier $\mathsf{R} = \tilde{\Lambda}^{-1} \circ \Lambda$] zu eindeutig bestimmten Drehparametern (Drehachse und -Winkel) führt, ist schon in Abschn. **2** gezeigt worden.

Zunächst sei vorausgeschickt, daß es offenbar ausreicht, die nullte Spalte von R [das sind also die Matrixelemente $\mathsf{R}_{\sigma 0}$] in die erforderliche Form zu bringen; denn dann ist $\mathsf{R}_{00} = 1$, und daraus folgt wiederum [vgl. Gl. (6)], daß auch die nullte Zeile [$\mathsf{R}_{0\sigma}$] die erforderliche Gestalt hat. Schließlich ist dann aber auch der verbleibende räumliche Teil eine orthogonale Matrix, denn das Produkt $\tilde{\Lambda}^{-1} \circ \Lambda$ ist ja auf jeden Fall wieder eine Lorentz-Transformation und erfüllt so die Lorentz-Invarianz-Bedingung (1), die in ihrem räumlichen Teil die Orthogonalitätsbedingung ist.

Zur Vereinfachung der Rechnung schreiben wir Λ in der Form

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_0 & \dots\;\dots\;\dots \\ \hline & \dots\;\dots\;\dots \\ \vec{\lambda} & \dots\;\dots\;\dots \\ & \dots\;\dots\;\dots \end{array}\right) \qquad \lambda := |\vec{\lambda}| \quad ;$$

dabei können wir $\lambda > 0$ voraussetzen, denn sonst wäre Λ trivialerweise bereits eine reine Drehung.

Die gesuchte (*reine*) Transformation $\tilde{\Lambda}$ parametrisieren wir durch $(\vec{m}, \beta)$ [vgl. Gl. (9)]:

$$\tilde{\Lambda}^\mu{}_\nu = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & -\beta\gamma\,(\vec{m}\cdot \\ \hline & \\ -\beta\gamma\,\vec{m} & 1 + (\gamma - 1)\,\vec{m}\,(\vec{m}\,\cdot \\ & \end{array}\right) \quad ;$$

die dazu inverse Matrix $\tilde{\Lambda}^{-1}$ erhält man, indem man überall β durch $-\beta$ ersetzt.

Dann wird die nullte Spalte von $\tilde{\Lambda}^{-1} \circ \Lambda$:

$$\left(\tilde{\Lambda}^{-1} \circ \Lambda\right)^{\mu}{}_{0} = \begin{pmatrix} \gamma\,\lambda_0 + \beta\gamma\,(\vec{m}\cdot\vec{\lambda}\,) \\ \beta\gamma\lambda_0\,\vec{m} + \vec{\lambda} + (\gamma-1)\,(\vec{m}\cdot\vec{\lambda}\,)\,\vec{m} \end{pmatrix} \quad .$$

Die Parameter $\vec{m}, \beta$ von $\tilde{\Lambda}$ müssen also den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} \gamma\,\lambda_0 + \beta\gamma\,(\vec{m}\cdot\vec{\lambda}\,) &= 1 && (11) \\ \vec{\lambda} + (\gamma-1)\,(\vec{m}\cdot\vec{\lambda}\,)\,\vec{m} + \beta\gamma\lambda_0\,\vec{m} &= \vec{0} \quad . && (12) \end{aligned}$$

Aus (12) folgt $\vec{m} \propto \vec{\lambda}$; wegen $\vec{m}^{\,2} = 1$ ist also $\vec{m} = \kappa \cdot \dfrac{\vec{\lambda}}{\lambda}$ und damit $(\vec{m}\cdot\vec{\lambda}\,)$, mit $\kappa = \pm 1$. Setzt man das in die Bedingungen (11) und (12) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \gamma\,\lambda_0 + \beta\gamma\,\kappa\lambda &= 1 && (13) \\ \left(\gamma + \beta\gamma\kappa\,\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\vec{\lambda} &= \vec{0} \quad . && (14) \end{aligned}$$

Es ist $\lambda > 0$, nach Definition; $\lambda_0 \geq 1$, weil $\Lambda \in \mathcal{L}_+{}^{\uparrow}$; $\gamma \geq 1$, nach Definition, und schließlich $\beta \geq 0$ nach Definition [um der Eindeutigkeit der Parametrisierung willen; vgl. Abschn. **4**]. Damit folgt $\kappa = -1$ aus Gl. (13).

Aus (14) folgt dann wiederum

$$\beta = \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad ,$$

und (13) wird damit zu

$$\lambda_0 = \gamma\,({\lambda_0}^2 - \lambda^2) = \gamma \quad ,$$

denn ${\lambda_0}^2 - \lambda^2 = 1$ ist die (schon mehrfach benutzte) 00-Komponente der Gl. 1 . Die beiden Gleichungen (11,12) sind also konsistent. Sie bestimmen β und $\vec{m}$, und damit $\tilde{\Lambda}$, eindeutig. ∎

Wir stellen zusammenfassend fest: jedes $\Lambda \in \mathcal{L}_+{}^{\uparrow}$ läßt sich schreiben als Produkt

$$\Lambda = \tilde{\Lambda} \circ \mathsf{R}$$

einer *reinen* Lorentz-Transformation $\tilde{\Lambda}$ mit einer räumlichen Drehung R. Sowohl $\tilde{\Lambda}$ als auch R sind hierbei eindeutig bestimmt.

Da sowohl $\tilde{\Lambda}$ als auch R durch stetige Änderung aus dem Einselement hervorgehen, ist $\mathcal{L}_+{}^{\uparrow}$ zusammenhängend.