



## Grassmann-Algebren

– Hermann Grassmann (1809 - 1877) –

### A Grundbegriffe

Eine *Grassmann-Algebra* der Dimension  $N$  ist eine Algebra  $\mathcal{G}$  über einem Körper  $\mathcal{K}$ ,<sup>1</sup> aufgespannt von  $N$  *antikommutierenden* Erzeugenden  $\eta_k$  :

$$\{\eta_j, \eta_k\} = 0 \quad \forall j, k \quad .$$

Es folgt sofort

$$\eta_j^2 = 0 \quad , \quad [ \text{Pauli-Prinzip !} ]$$

und jede (analytische) Funktion auf  $\mathcal{G}$  läßt sich in nur endlich viele Terme entwickeln, nämlich

$$f(\vec{\eta}) = a_0 + \sum_k a_k \eta_k + \sum_{j < k} \eta_j \eta_k + \dots$$

Da jede der Teilsummen gerade  $\binom{N}{m}$  Summanden hat, haben wir in der Reihenentwicklung insgesamt

$$\sum_m \binom{N}{m} = \sum_m \binom{N}{m} \cdot 1^m \cdot 1^{N-m} = (1+1)^N = 2^N$$

Terme. Das vereinfacht Vieles; andererseits sind Ausdrücke wie  $f(\vec{\eta}) \cdot g(\vec{\eta})$  im Eizelfall mühsamer auszurechnen, weil man immer auf die Reihenfolge (also auf Vorzeichen!) zu achten hat.

#### A .1 Komplexe Grassmann-Algebren

Bei der Quantisierung des Dirac-Felds haben wir es mit komplexen Feldern zu tun; also müssen wir vor allem *komplexe* Grassmann-Algebren betrachten. Eine  $N$ -dimensionale *komplexe* Grassmann-Algebra ist aber nichts weiter als eine  $2N$ -dimensionale *reelle* Grassmann-Algebra (über dem Körper der komplexen Zahlen): mit

$$\eta := \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_R + i \eta_I)$$

---

<sup>1</sup>Algebra heißt hier (wie sonst auch): mit  $\eta, \theta \in \mathcal{G}$  ist auch  $\zeta = (a\eta + b\theta) \in \mathcal{G} \quad \forall a, b \in \mathcal{K}$  .

erhalten wird die üblichen Regeln:

die Algebra wird aufgespannt von  $\eta_k, \bar{\eta}_k$  ( $k = 1, \dots, n$ )

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\eta}} &= \eta \\ \overline{\eta\theta} &= \bar{\theta}\bar{\eta} \\ \overline{c\eta} &= c^* \bar{\eta}\end{aligned}$$

sowie (leicht ungewohnt)

$$\bar{\eta}\eta = -\eta\bar{\eta} = i\eta_R\eta_I \quad .$$

## B Differentiation

Die *Differentiation* einer Funktion nach einer Grassmann-Variablen ist im Grunde die übliche; nur muss man – wegen der Antikommutativität! – ein Vorzeichen festlegen. Üblich ist <sup>2</sup>

$$\frac{\partial}{\partial\eta_j}\eta_j\eta_k := +\eta_k = -\frac{\partial}{\partial\eta_j}\eta_k\eta_j$$

Man merkt sich das am leichtesten mit der Regel: **wenn der Differentialoperator und die Variable unmittelbar nebeneinander stehen** (d.h. ohne dass eine Grassmann-Variable dazwischen steht), ist das Vorzeichen **positiv**:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta_j}\eta_j\eta_k \\ \leftrightarrow\end{aligned}$$

Stehen sie nicht nebeneinander, muss man halt durchtauschen.

Die Differentiation hat eine unmittelbar aus der Antikommutativität folgende, aber dennoch verblüffende Eigenschaft: **zweite Ableitungen nach dem gleichen Argument verschwinden immer**:

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta_j^2}f(\vec{\eta}) = 0 \quad \forall f \quad .$$

Das liegt einfach daran, dass  $\eta_j^2 = 0$  auch dann, wenn zwischen den beiden  $\eta_j$  andere Grassmann-Variable stehen.

Unmittelbare Folge dieser Tatsache ist, dass ein *Integral über Grassmann-Variablen* nicht in der üblichen Weise als Umkehrung der Differentiation definiert werden kann. Etwas vornehm ausgedrückt: der Differentialoperator  $D$  hat wegen  $D^2 = 0$  eine verschwindende Norm, also *existiert sein Inverses nicht*.

## C Integration

Um eine Integration zu definieren, muss man deren Eigenschaften axiomatisch fordern:

1. es soll eine Integration über Grassmann-Variable definiert werden. Das bedeutet: das Differential der Integration,  $d\eta$ , soll *selbst Element der Grassmann-Algebra* sein. Es muss also gelten:

$$d\eta_k d\eta_k \stackrel{!}{=} 0$$

Um keine Vorzeichen-Ambiguitäten zu schaffen, schreibt man (wie Physiker das ohnehin oft tun) das *Differential grundsätzlich unmittelbar hinter das Integralzeichen*.

---

<sup>2</sup>In der mathematischen Literatur heißt das “Links-Differentiation”.

2. die Integration soll *linear* sein:

$$\int d\eta (a + b\eta) \stackrel{!}{=} a \int d\eta + b \int d\eta \eta$$

3. das Integral (das sich über den gesamten Wertebereich erstreckt – das ist in allen Anwendungen ohnehin der Fall –), soll *translationsinvariant* sein:

$$\int d\eta f(\eta + \theta) \stackrel{!}{=} \int d\eta f(\eta) \quad .$$

Mathematisch bedeutet das, dass wir mit dem zu definierenden Integral immer ein *bestimmtes Integral* meinen (also ein *Funktional*), und nicht etwa eine Stammfunktion — letztere kann es, wie oben schon erwähnt, nicht geben.

Die geforderte Translationsinvarianz ist analog der eines gewöhnlichen Integrals der Form  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+c)dx$ . Sie hat zur Folge, dass, wie gewohnt, Randterme nicht auftreten (z.B. bei partieller Integration).

Aus diesen Forderungen folgt<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \int d\eta f(\eta + \theta) &= \int d\eta (a + b(\eta + \theta)) \\ &= \left( \int d\eta \right) (a + b\theta) + \left( \int d\eta \eta \right) b \\ &\stackrel{!}{=} \int d\eta f(\eta) = \int d\eta (a + b\eta) = a \int d\eta + b \int d\eta \eta \\ &\text{für beliebige } a, b, \theta \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind nicht-trivial nur lösbar, wenn

$$(i) \int d\eta = 0 \quad ,$$

während für  $\int d\eta \eta$  aus ihnen zunächst nichts folgt; da aber dieses Integral keinen Parameter enthält, von dem es abhängen könnte, muss es *konstant* sein:

$$(ii) \int d\eta \eta = \text{const.} \quad .$$

Man definiert natürlich

$$(ii) \int d\eta \eta \stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{“Berezin-Konvention”})$$

Analog zu oben legt man das Vorzeichen bei mehrfach-Integralen fest durch

$$\int d\theta \int \underset{\leftrightarrow}{d\eta} \eta \theta = +1$$

---

<sup>3</sup>Ein bilinearer Term von der Form  $c\eta\theta$  kann wegen der Additivität  $(\eta + \theta)$  nicht auftreten, wie man sofort sieht:

$$(\eta + \theta)^2 = (\eta + \theta)(\eta + \theta) = \eta^2 + \eta\theta + \theta\eta + \theta^2 = 0 \quad .$$

Ich danke Michael Lorke für diesen Hinweis.

Durch diese Festlegungen ist auch die Integration von Grassmann-Variablen definiert.

Vergleicht man Differentiations- und Integrations-Regeln:

$$\frac{\partial}{\eta}(a + b \eta) = 0 + b$$

$$\int d\eta (a + b \eta) = 0 + b \quad ,$$

so stellt man – verblüfft ? – fest, dass Beides zum gleichen Resultat führt! Das ist nicht besonders wichtig, aber doch bemerkenswert. Auf jeden Fall ist es noch einmal eine Bestätigung, dass diese ‘Integration’ *nicht die Umkehrung der Differentiation*, sondern eine neue, etwas formale Begriffsbildung darstellt, deren Nützlichkeit sich allerdings erst in ihrer Anwendung erweisen kann.

### C .1 Variablen-Substitution

Oft hat man Anlass, neue Variablen einzuführen, etwa durch

$$\eta'_j := \sum_k B_{jk} \eta_k \quad .$$

Es ist nun die Frage: wie rechnet man Volumenintegrale um? Oder anders: was ist

$$\int d\eta'_N d\eta'_{N-1} \dots d\eta'_2 d\eta'_1 \quad ?$$

Wegen der unorthodoxen Eigenschaften der Integration kann man *nicht* trivialerweise ansetzen

$$\int d\eta'_N d\eta'_{N-1} \dots d\eta'_2 d\eta'_1 \stackrel{?}{=} \int d\eta_N d\eta_{N-1} \dots d\eta_2 d\eta_1 \cdot \det \left| \frac{\partial \vec{\eta}'}{\partial \vec{\eta}} \right| \quad ,$$

wie man das von gewöhnlichen Volumenintegralen kennt.

Wir betrachten zunächst den Fall  $N = 2$  (wobei man wieder sorgsam auf die Vorzeichen zu achten hat):

$$\eta'_1 = B_{11}\eta_1 + B_{12}\eta_2$$

$$\eta'_2 = B_{21}\eta_1 + B_{22}\eta_2$$

es folgt

$$\begin{aligned} \eta'_1 \eta'_2 &= B_{11}B_{22} \eta_1 \eta_2 + B_{12}B_{21} \eta_2 \eta_1 \\ &= B_{11}B_{22} \eta_1 \eta_2 - B_{12}B_{21} \eta_1 \eta_2 \\ &= \det(B) \eta_1 \eta_2 \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Die Volumenintegrale<sup>4</sup> in den ungestrichenen und den gestrichenen Variablen sind beide gleich:

$$\int d\eta_2 d\eta_1 \eta_1 \eta_2 = 1 \quad ,$$

---

<sup>4</sup>Andere Argumente als das *volle Produkt aller* Erzeugenden braucht man nicht zu betrachten: fehlen welche oder kommen welche mehrfach vor, verschwindet das Integral!

$$\int d\eta'_2 d\eta'_1 \eta'_1 \eta'_2 = 1 \quad .$$

Nun ist aber [ Gl.(1) ]

$$\eta'_1 d\eta'_2 = \det(B) \eta_1 \eta_2 \quad ,$$

also

$$\int d\eta'_2 d\eta'_1 \eta'_1 \eta'_2 = \int d\eta'_2 d\eta'_1 \det(B) \eta_1 \eta_2$$

und damit

$$\int d\eta_2 d\eta_1 \eta_1 \eta_2 = \int d\eta'_2 d\eta'_1 \det(B) \eta_1 \eta_2 = 1 \quad .$$

oder kurz<sup>5</sup>

$$\int d\eta'_2 d\eta'_1 = \{\det(B)\}^{-1} \int d\eta_2 d\eta_1 \quad , \quad (2)$$

die Jacobi-Determinante also hier *im Nenner* statt, wie bei gewöhnlichen Volumenintegralen, im Zähler.

Die Verallgemeinerung von Gl.(2) für  $N$  Dimensionen lautet

$$\boxed{\int d\eta_2 \cdots d\eta_1 = \det \left| \frac{\partial \vec{\eta}'}{\partial \vec{\eta}} \right| \int d\eta'_N \cdots d\eta'_1} \quad . \quad (3)$$

Der Beweis geht ganz analog zu dem für  $N = 2$ ; man braucht dazu nur die Verallgemeinerung von Gl.(1), die sich fast unmittelbar aus der Definition der Determinante

$$\det(B_{jk}) := \sum_P (-1)^P \prod_{k=1}^N b_{k P(k)}$$

ergibt [  $P$  ist eine Permutation der  $N$  Indizes  $k$  ].

## D Gauß-Integrale

Wie wir bei der bosonischen Pfadintegral-Quantisierung gesehen haben, spielen Gauß-Integrale über die Feldgrößen eine zentrale Rolle. Wir wollen deshalb solche Integrale auswerten.

Wir betrachten zunächst den (komplexen) eindimensionalen Fall ( $B$  ist c-Zahl):

$$f(\bar{\eta}, \eta) = e^{-\bar{\eta} B \eta}$$

Entwicklung der e-Funktion ergibt

$$e^{-\bar{\eta} B \eta} = 1 - \bar{\eta} B \eta \quad ,$$

das Integral ist also einfach

$$\int d\bar{\eta} d\eta f(\bar{\eta}, \eta) = 0 - \int d\bar{\eta} d\eta \bar{\eta} B \eta = +B \quad .$$

---

<sup>5</sup>Wegen der Linearität aller Grassmann-Funktionen sind Grassmann-Funktionalmatrizen immer c-Zahlen; man kann die Determinanten also gestrost vor die Grassmann-Integrale ziehen (oder auch irgendwo darunter stehen lassen ...).

Auch mag anfangs etwas unerwartet sein; es ist aber konsistent mit den Überlegungen in Abschnitt C .1: man setze nur  $\eta' := B\eta$  :

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} B \eta} = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta} \eta'} = B \int d\bar{\eta} d\eta' e^{-\bar{\eta} \eta'} = -B \int d\bar{\eta} d\eta' \bar{\eta} \eta' = +B \quad .$$

Mit der gleichen Überlegung erhält man mit Anwendung der Transformationsformel Gl.(3) das entsprechende Gauß-Integral in  $N$  Dimensionen:

$$\int d\bar{\eta}_N \cdots d\bar{\eta}_1 d\eta_N, \cdots d\eta_1 e^{-\bar{\eta} B \eta} = \det(B) \quad . \quad (4)$$

Ist nun  $B$  Hermite-sch, so sind seine Eigenwerte reell, und es gibt eine unitäre Hauptachsentransformation  $U$ , die  $B$  auf Diagonalform bringt. Es folgt

$$\int d\bar{\eta}_N \cdots d\bar{\eta}_1 d\eta_N, \cdots d\eta_1 e^{-\bar{\eta} B \eta} = \det(U^{-1} B U) = \det(B) = \prod_k b_k \quad . \quad (5)$$

Das ist ein wichtiges Ergebnis.

## E Grassmann-Felder

Entsprechend den allgemeinen Verfahren beim Übergang von der Punktmechanik zur Feldtheorie betrachtet man den Grenzfall  $N \rightarrow \infty$ : statt den diskreten Erzeugenden  $\eta_k$  hat man dann mit Grassmann-*Feldern*  $\eta(x)$  zu tun. Die vorstehenden Überlegungen kann man Punkt für Punkt übernehmen: aus der Differentiation wird lediglich eine Funktionalableitung:

$$\frac{\partial}{\partial \eta(y)} \eta(x) = +\delta^4(x - y) \quad ,$$

während die Integrationsregeln im Prinzip gänzlich unverändert bleiben.

Lediglich beim Volumenintegral [vgl. Abschnitt C .1] sowie bei den Gauß-Integralen [Abschnitt D ] wird aus der  $N$ -fach-Integration eben ein *Pfadintegral*.

Allerdings bereitet das Auftreten von Determinanten natürlich zusätzliche und recht nicht-triviale Probleme, die zu behandeln den Rahmen dieses Skripts sprengen würde<sup>6</sup>. Vielleicht motiviert manchen das folgende Zitat aus Ryder: “Quantum Field Theory” ein wenig weiter:

“We shall treat these formulae with the confidence that, one day, a rigorous mathematical justification for them will be found.”

---

<sup>6</sup>Einiges dazu findet sich bei Berezin: “The Method of Second Quantization” .

## F Physiker-Literatur

Das Standardwerk (und mathematisch am sorgfältigsten) ist

**F.A. Berezin:** *The Method of Second Quantization*,  
Academic Press, New York 1966  
Univ-Bibl. HB: a phy 531/28

Kurze Erklärungen finden sich in allen modernen Quantenfeldtheorie-Lehrbüchern, die sich überhaupt mit der Pfadintegral-Quantisierung von fermionischen Feldern befassen. besonders ausführlich ist das in

**J. Reinhardt (& W. Greiner):** *Feldquantisierung* (Band 7A der Reihe “Theoretische Physik”,  
Harri Deutsch, Frankfurt a.M. 1993