



Relativistische Quantenmechanik von Dirac-Teilchen ^{*})

Vorbemerkung:

Dieses Skript soll hauptsächlich dazu dienen, die Grundlagen zusammenzustellen, auf denen die eigentliche Quantenelektrodynamik aufbaut. Der Zweck ist also in etwa der einer ‘Formelsammlung’ : Notation festlegen (einschl. der lästigen, aber notwendigen Klärung von Normierungsfragen) und Ergebnisse zusammenstellen.

Dabei wird vorausgesetzt, dass der Leser der elementaren Dirac-Theorie schon einmal begegnet ist: die übliche ‘Herleitung’ der Dirac-Gleichung (als Linearisierung der Klein-Gordon-Gleichung) einschl. der Einführung der Clifford-Algebra (γ -Matrizen) wird nicht noch einmal behandelt ¹.

Wir betrachten in diesem Skript ausschließlich *freie Teilchen*, und dabei meistens Eigenfunktionen zum Impuls. Diese sind als “Basis” für die Störungstheorie besonders zweckmäßig.

^{*})Das hier vorliegende Skript ist eine inhaltlich unveränderte Neuauflage des entsprechenden Skripts der Vorlesung vom WS 99/00.

¹Diese Themen sind ausführlich im Skript “Pauli- und Dirac-Gleichung” (Quantenmechanik, WS 95/96) dargestellt (unter <http://www.itp.uni-bremen/~noack/pauli.ps> im Internet verfügbar).

Notation:

- Einheiten: $\hbar = c = 1$
- Vierervektoren werden mit griechischem Index oder ganz ohne Index notiert, dreidimensionale Vektoren mit Vektorpfeil über dem Buchstaben, z.B.

$$x := x^\mu = (t, \vec{r}) \quad , \quad p := p^\mu = (p_0, \vec{p})$$

- Der Übersichtlichkeit halber benutzen wir für den Impuls den Buchstaben p , für die Variable in Fouriertransformationen von der Orts- in die Impulsdarstellung den Buchstaben k , obwohl physikalisch kein Unterschied besteht.

- $E := +|p_0|$

- Signatur der Minkowski-Metrik $\eta^{\mu\nu} : (+1, -1, -1, -1)$; $d_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$

- "Feynman-dagger": $\not{b} := b_\mu \gamma^\mu = b^\mu \gamma_\mu$ für jeden Vierervektor b^μ

- Operatoren (im Hilbertraum der Wellenfunktionen): Fettbuchstaben;
 \mathbf{X}^\dagger ist der zu \mathbf{X} adjungierte Operator

- Antisymmetrischer Tensor ("Levi-Civita-Symbol") im \mathbb{R}^3 :

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{jik} \quad , \quad \epsilon_{123} = +1$$

- Antisymmetrischer Tensor ("Levi-Civita-Symbol") im Minkowski-Raum:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon_{\nu\mu\rho\sigma} = -\epsilon_{\mu\rho\nu\sigma} = -\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \quad , \quad \epsilon_{0123} = +1 \quad [\text{ACHTUNG: } \epsilon_{1230} = -1]$$

Inhaltsverzeichnis

A	Normierung relativistischer Wellenfunktionen	1
A 1	Nichtrelativistischer Fall	1
A 2	Relativistische Wellenfunktionen, invariante Integration	2
A 3	Invariantes Skalarprodukt	3
A 4	Zusammenfassung	5
B	Dirac-Gleichung, Spinoren-Gymnastik	6
B 1	Grundlagen; Notation	6
B 2	Spinorenbasis	8
B 3	Helizität	10
B 4	Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen	11
1.	Orthogonalität	11
2.	Vollständigkeit	12
B 5	Wellenpakete	13
C	Poincaré-Kovarianz der Dirac-Gleichung	15
C 1	Allgemeines zu Transformationsgruppen	15
1.	Erzeugende	15
2.	Darstellungen	16
C 2	Die Algebra der Poincaré-Gruppe	17
C 3	Die (endlich-dimensionalen) irreduziblen Darstellungen der Lorentz-Gruppe	19
C 4	Die Invarianten der Poincaré-Algebra	20
C 5	Das Transformationsverhalten von Dirac-Spinoren	21
C 6	Der spin des Dirac-Felds	23

A Normierung relativistischer Wellenfunktionen

Die Bewegung freier Teilchen wird auch im relativistischen Bereich durch ebene Wellen beschrieben. Eigenfunktionen zum Ort bzw. Impuls sind auch hier keine Hilbertraumvektoren im strengen (normierbaren) Sinne; während aber nichtrelativistisch das Rechnen mit “auf die δ -Funktion normierten” Wellenfunktionen weiter keine Schwierigkeiten macht, ergeben sich relativistisch aus der Forderung nach Poincaré-Kovarianz Besonderheiten, die eine sorgfältige Behandlung erfordern.

A 1 Nichtrelativistischer Fall

Hier ist die Notation in der Literatur – (fast) völlig einheitlich – wie folgt:

Hilbertraum (abstrakt)	Ortsdarstellung	Impulsdarstellung
Skalarprodukt :		
$\langle \psi \phi \rangle$	$\int d^3\vec{r} \psi^*(\vec{r}) \phi(\vec{r})$	$\int d^3\vec{k} \tilde{\psi}^*(\vec{k}) \tilde{\phi}(\vec{k})$
Fouriertransformation :		
	$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3\vec{k} e^{+i\vec{k}\vec{r}} \cdot \tilde{\phi}(\vec{k})$	$\tilde{\phi}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \cdot \phi(\vec{r})$
Eigenzustände zum Impuls \vec{p} (“ebene Wellen”) :		
$ p\rangle$	$\langle \vec{r} \vec{p} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{+i\vec{p}\vec{r}}$	$\langle \vec{k} \vec{p} \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{p})$
• Orthogonalität :		$\langle \vec{p}' \vec{p} \rangle = \delta^3(\vec{p}' - \vec{p})$
• Vollständigkeit :		$\int d^3\vec{p} \vec{p}\rangle \langle \vec{p} = \mathbb{1}$

Tabelle 1: Normierung in der nicht-relativistischen Quantenmechanik

Im Schrödingerbild ist die zeitliche Entwicklung eines Zustands $|\phi\rangle$ gegeben durch

$$|\phi\rangle_t = e^{-i\mathbf{H}(t-t_0)} |\phi\rangle_{t_0} \quad ;$$

für einen Eigenzustand zum Impuls [mit Eigenwert \vec{p}] in Ortsdarstellung also

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle_t = e^{-i\mathbf{H}t} \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle_0 = e^{-i\mathbf{H}t} \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{i\vec{p}\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{-i(Et - \vec{p}\vec{r})}$$

mit $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. Man beachte, dass E keine unabhängige Größe ist, sondern durch \vec{p} vollständig bestimmt. Deshalb ist der Übergang zur Impulsdarstellung auch für die zeitabhängige Funk-

tion $\phi_{\vec{p}}(t, \vec{r}) := \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle_t$ nach wie vor ein dreidimensionales Fourierintegral:

$$\begin{aligned} \phi_{\vec{p}}(t, \vec{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} \tilde{\phi}_{\vec{p}}(t, \vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} e^{-iEt} \tilde{\phi}_{\vec{p}}(0, \vec{k}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} e^{-iEt} \delta^3(\vec{k} - \vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{-i(Et - \vec{p}\vec{r})} . \end{aligned}$$

A 2 Relativistische Wellenfunktionen, invariante Integration

Wir behandeln zunächst nur den raum-zeitlichen Anteil der Zustandsfunktion², in Ortsdarstellung. Statt $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ haben wir jetzt

$$p^2 \equiv p_\mu p^\mu \equiv E^2 - \vec{p}^2 = m^2 (> 0) \quad \underline{\text{und}} \quad p_0 > 0 .$$

Die zweite Bedingung, $p_0 = E > 0$, ergibt sich aus der Forderung nach physikalischer Interpretierbarkeit. Beide Beziehungen sind Poincaré-invariant.

▷ **Übung:** Warum ist $p_0 > 0$ Poincaré-invariant?

Obwohl physikalisch gesehen der Übergang zur Impulsdarstellung nach wie vor durch eine dreidimensionale Fouriertransformation gegeben ist, würden wir jetzt – um zu einer invarianten Formulierung zu kommen, gerne so etwas wie

$$\phi(x) \stackrel{?}{=} \frac{N}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^4k e^{-ikx} \tilde{\phi}(k)$$

schreiben. Das geht, wenn wir die überzählige Integration durch geeignete δ - und Stufenfunktionen³ ‘kompensieren’ :

$$\phi(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^4k \delta(k^2 - m^2) \underline{\mathbf{1}}(k_0) e^{-ikx} \tilde{\phi}(k) .$$

Die δ -Funktion stellt die ‘Massenschalen-Bedingung’ sicher, die $\underline{\mathbf{1}}$ -Funktion das richtige Vorzeichen der Energie, und N ist eine im Prinzip noch frei verfügbare Normierungskonstante für die Fouriertransformierte $\tilde{\phi}(k)$.

Die Integration über k_0 kann man ausführen, nachdem die δ -Funktion entsprechend umgeformt ist:

$$\begin{aligned} \delta(k^2 - m^2) \underline{\mathbf{1}}(k_0) &= \delta(k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2) \underline{\mathbf{1}}(k_0) \\ &= \delta\left(\left\{k_0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}\right\} \left\{k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}\right\}\right) \underline{\mathbf{1}}(k_0) \\ &= \frac{1}{k_0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}} \cdot \delta\left(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}\right) = \frac{1}{2k_0} \cdot \delta\left(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}\right) . \end{aligned}$$

²Das heißt: wir sehen ab von irgendwelchen ‘inneren Freiheitsgraden’ des Teilchens. Physikalisch bedeutet das: wir betrachten den Fall eines *skalaren, ungeladenen* Teilchens (Boson mit Spin 0).

Welche Änderungen sich für Teilchen mit Ladung und Spin ergeben, wird an anderer Stelle behandelt. Daß wir hier auch $m > 0$ voraussetzen, hat eher technische Gründe; aber man bedenke: wenn das Teilchen keine anderen Eigenschaften außer Masse hat, und die ist auch noch null — was bleibt dann an Physik übrig ?!

³ $\underline{\mathbf{1}}(x) := \frac{x+|x|}{2|x|}$, (x reell) [“Stufenfunktion”] . Oft wird sie statt mit $\underline{\mathbf{1}}(x)$ mit $\Theta(x)$ bezeichnet (“Heaviside-Funktion”).

▷ **Übung:** Nachrechnen! Man überlege sich insbesondere, wo $\underline{\Gamma}(k_0)$ geblieben ist.

Es ergibt sich damit also für die Fouriertransformation von der Orts- zur Impulsdarstellung:

$$\phi(x) = \int_+ \frac{d^3\vec{k}}{2k_0} e^{-ikx} \tilde{\phi}(k) \quad ;$$

hierbei ist im Integranden für k_0 überall $+\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ zu setzen⁴, so dass auch die Fouriertransformierte $\tilde{\phi}(k)$ nur von \vec{k} (und nicht unabhängig davon auch noch von k_0) abhängt.

Man nennt $\frac{d^3\vec{k}}{2k_0}$ das “invariante Volumenelement (im Impulsraum) auf der Massenschale”; tatsächlich haben wir ja gesehen, dass diese dreidimensionale Integration Poincaré-invariant ist. Man beachte weiter, dass der Integrand als Zeitabhängigkeit den Faktor

$$e^{-ik_0 t} = e^{-i+\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} t}$$

enthält; für ein freies Teilchen mit dem Impuls \vec{p} [$\tilde{\phi}_{\vec{p}}(k) \propto \delta^3(\vec{k} - \vec{p})$] erhält man so die richtige (Schrödinger-)Zeitabhängigkeit für $\phi(x)$:

$$\phi_{\vec{p}}(x) = e^{-i\mathbf{H}t} \phi_{\vec{p}}(0, \vec{r}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{H} = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad .$$

Für die Rücktransformation (vom Impuls- in den Ortsraum) hat man

$$\tilde{\phi}(k) = \frac{2k_0}{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3\vec{r} e^{ikx} \phi(x) \quad ; \quad (1)$$

hier ist wieder überall für k_0 der Ausdruck $+\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ eingesetzt zu denken.

Der Integrand in Gl.(1) ist, solange $\phi(x)$ ein Teilchen der Masse m (> 0) mit positiver Energie beschreibt, tatsächlich *nicht von x_0 abhängig* [die Abhängigkeiten von e^{ikx} und $\phi(x)$ kompensieren sich], und $\tilde{\phi}(k)$ ist also *zeitunabhängig*, wie das – nach oben – sein soll.

A 3 Invariantes Skalarprodukt

Wir betrachten nun das Hilbertraum-Skalarprodukt zweier Wellenfunktionen⁵, und zwar zunächst in der Impulsdarstellung. Wollen wir wieder ein *Poincaré-invariantes* Skalarprodukt haben, so müssen wir offenbar definieren [vgl. Abschnitt A 2]

$$\langle \psi | \phi \rangle := M \int_+ \frac{d^3\vec{k}}{2k_0} \tilde{\psi}^*(k) \tilde{\phi}(k) \quad ;$$

hierbei ist M eine weitere frei verfügbare Normierungskonstante. Das so definierte Skalarprodukt ist

- positiv-definit,
- zeitunabhängig,

⁴Das + am Integralzeichen soll an diese Vereinbarung erinnern.

⁵Man beachte, dass das nur einen Sinn ergibt, wenn beide Wellenfunktionen den gleichen *Teilchentyp* beschreiben! Insbesondere müssen also beide Wellenfunktionen zur *gleichen Masse m* gehören!

so dass es für die physikalische Interpretation brauchbar ist.

Was erhält man hieraus in der *Ortsdarstellung*?

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= M \int_+ \frac{d^3 \vec{k}}{2k_0} \tilde{\psi}^*(k) \tilde{\phi}(k) \\ &= M \int_+ \frac{d^3 \vec{k}}{2k_0} \frac{1}{N^2} \frac{(2k_0)^2}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{r}' \int d^3 \vec{r} e^{ik(x-x')} \psi^*(x') \phi(x) \\ &= \frac{M}{N^2} \int d^3 \vec{r}' \int d^3 \vec{r} \psi^*(x') \phi(x) \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int_+ d^3 \vec{k} (2k_0) e^{ik(x-x')} \quad . \end{aligned}$$

Das Integral über $d^3 \vec{k}$ ist fast schon eine δ -Funktion; den noch störenden Faktor $(2k_0)$ kann man durch “umschaulen” beseitigen:

$$(2k_0) e^{ik(x-x')} = -i \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) e^{ik(x-x')} \quad ,$$

und

$$(d_0 e^{ikx}) \cdot \phi(x) = d_0 \left\{ e^{ikx} \phi(x) \right\} - e^{ikx} d_0 \phi(x) \quad .$$

Der erste Term trägt nichts bei, weil $e^{ikx} \phi(x)$ nicht von x_0 abhängt (! — vgl. S.3). Entsprechendes gilt für den konjugiert-komplexen Term $e^{-ikx} \psi^*(x)$; also hat man

$$(2k_0) e^{ik(x-x')} \cdot \psi^*(x') \phi(x) = i e^{ik(x-x')} \left\{ \psi^*(x') (d_0 \phi(x)) - (d_0 \psi^*(x')) \phi(x) \right\} \quad .$$

Setzt man das ein, so kann man das Integral über $d^3 \vec{k}$ auswerten und erhält so insgesamt

$$\begin{aligned} \langle \psi | \phi \rangle &= \frac{M}{N^2} \int d^3 \vec{r} \psi^*(x) i \overleftrightarrow{d}_0 \phi(x) \\ &:= \frac{M}{N^2} \int d^3 \vec{r} \left\{ \psi^*(x) (id_0 \phi(x)) - (id_0 \psi^*(x')) \phi(x) \right\} \quad . \end{aligned}$$

▷ **Übung:** Nachrechnen!

Dieses Skalarprodukt in der Ortsdarstellung wird auch “Klein-Gordon-Metrik” genannt.

Die eingangs erwähnten ebenen Wellen, für deren Ortsdarstellung wir wie üblich $\langle x | \vec{p} \rangle$ schreiben können, sind in Bezug auf dieses Skalarprodukt orthogonal. Weil sie aber ‘uneigentliche’ Elemente des Hilbertraums sind, d.h. nicht normierbar, kommt bei ihrer “Normierung auf die δ -Funktion” eine *dritte* willkürliche Normierungskonstante K ins Spiel, die von N und M unabhängig gewählt werden kann:

$$\langle x | \vec{p} \rangle = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \quad .$$

Mit diesen Festlegungen erhält man dann schließlich die in der Tabelle 2 angegebenen Ausdrücke für die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen der ebenen Wellen.

▷ **Übung:** Nachrechnen!

Die Normierungskonstanten K , N und M sind grundsätzlich willkürlich und können deshalb frei gewählt werden — wovon in der Literatur reichlich Gebrauch gemacht wird. Allerdings ist dabei darauf zu achten, dass die manifeste Kovarianz aller Ausdrücke nur dann gewahrt bleibt, wenn K , N und M wirklich *Konstanten* sind. Würde man z.B. $K := \frac{1}{\sqrt{2p_0}}$ und gleichzeitig $N := M := 1$ setzen, so müßte in der Vollständigkeitsrelation für ebene Wellen die Konstante K natürlich in das Integral hineingezogen werden — mit der Folge, dass die Integration nicht mehr einfach als eine “Summe mit dem invarianten Volumenelement $\frac{d^3\vec{p}}{2p_0}$ ” über die Projektionen $|\vec{p}\rangle\langle\vec{p}|$ gelesen werden kann.

Leider ist die genannte Normierung [$K := \frac{1}{\sqrt{2p_0}}$, $N := M := 1$] weit verbreitet und in der Mehrzahl der Lehrbücher der relativistischen Quantenmechanik [darunter *Ryder*, *Björken-Drell*, *Schweber*] zu finden. Offenbar wegen der geschilderten Schwierigkeiten mit der Kovarianz wechseln aber die Autoren auch häufig mitten im Text (und meist inkonsistent) die Normierung, ohne darauf hinzuweisen — also: *Vorsicht !!*

Die “rationale” Wahl der Normierung wäre die, die für $\vec{v} \rightarrow 0$, also $p_0 \rightarrow m$, in die in der nichtrelativistischen Quantenmechanik allein übliche übergeht, also $K := 1$, $N := M := 2m$. Für praktische Rechnungen am bequemsten ist vielleicht $K := N := M := 1$. Wir werden im weiteren immer diese letztere Normierung benutzen.

A 4 Zusammenfassung

Wie zu Beginn von Abschnitt A 2 bereits erwähnt, gelten die hier zusammengestellten Formeln zunächst nur für *skalare, ungeladene* Teilchen.

Hilbertraum (abstrakt)	Ortsdarstellung	Impulsdarstellung
Skalarprodukt :		
$\langle\psi \phi\rangle$	$\frac{M}{N^2} \int d^3\vec{r} \psi^*(x) i \overleftrightarrow{d}_0 \phi(x)$	$M \int_+ \frac{d^3\vec{k}}{2k_0} \tilde{\psi}^*(\vec{k}) \tilde{\phi}(\vec{k})$
Fouriertransformation :		
	$\phi(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi^3}} \int_+ \frac{d^3\vec{k}}{2k_0} e^{-ikx} \cdot \tilde{\phi}(k)$	$\tilde{\phi}(k) = \frac{2k_0}{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3\vec{r} e^{+ikx} \cdot \phi(x)$
Eigenzustände zum Impuls \vec{p} (“ebene Wellen”) :		
$ p\rangle$	$\langle x \vec{p}\rangle = \frac{K}{\sqrt{2\pi^3}} e^{-ipx}$	$\langle k \vec{p}\rangle = \frac{K}{N} (2p_0) \delta^3(\vec{k} - \vec{p})$
• Orthogonalität :	$\langle\vec{p}' \vec{p}\rangle = M \left(\frac{K}{N}\right)^2 (2p_0) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$	
• Vollständigkeit :	$\frac{N}{K} \int_+ \frac{d^3\vec{p}}{2p_0} \vec{p}\rangle\langle\vec{p} = \mathbb{1}$	

Tabelle 2: Normierung in der relativistischen Quantenmechanik

B Dirac-Gleichung, Spinoren-Gymnastik

B 1 Grundlagen; Notation

Die Dirac-Gleichung lautet in der Ortsdarstellung:

$$(i\cancel{d} - m)\psi(x) = 0$$

Die γ -Matrizen (“Dirac-Matrizen”) haben – darstellungsunabhängig – die Eigenschaften ⁶

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1} \quad , \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

In einer irreduziblen Darstellung sind sie 4×4 -Matrizen und durch obige Algebra bis auf eine Ähnlichkeitstransformation *eindeutig festgelegt*.

Zusätzlich definiert man *als Abkürzung* die “pseudoskalare” γ -Matrix

$$\gamma_5 := i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad .$$

In einer gebräuchlichen Darstellung [*nicht* die einzig übliche!] sind die γ -Matrizen gegeben durch

$$\gamma^0 = \gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^k = -\gamma_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

[jeder Eintrag ist eine 2×2 -Matrix], mit der üblichen Darstellung der Pauli-Matrizen $\vec{\sigma}$:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Es empfiehlt sich aber, so weit wie möglich darstellungsunabhängig zu rechnen. Besonders nützlich sind dabei die Projektionsoperatoren

$$P_\pm := \frac{1 \pm \gamma_0}{2} \quad [\rightsquigarrow \gamma_0 = P_+ - P_-] \quad (2)$$

Man rechnet leicht nach, dass das in der Tat Projektionen sind:

$$(P_\pm)^2 = P_\pm \quad , \quad (P_\pm)^\dagger = P_\pm \quad , \quad P_+ \cdot P_- = P_- \cdot P_+ = \mathbf{0} \quad , \quad P_+ + P_- = \mathbb{1} \quad .$$

P_\pm projiziert auf die “oberen” bzw. “unteren” Komponenten. Es gilt

$$P_\pm \gamma^0 = \gamma^0 P_\pm = \pm P_\pm \quad , \quad P_\pm \cancel{b} = \pm b_0 + \cancel{b} P_\mp \quad \text{für jeden Vierervektor } b^\mu \quad .$$

▷ **Übung:** Nachrechnen!

⁶Die γ -Matrizen (und alle mit ihnen gebildeten Größen) sind Operatoren im Raum der Spinoren. Um den Unterschied zu Operatoren im Hilbertraum der Wellenfunktionen deutlicher zu machen, schreiben wir sie *nicht* mit Fettdruckbuchstaben.

Um *Lösungen* der Dirac-Gleichung zu diskutieren, betrachten wir (in der Ortsdarstellung) Eigenfunktionen zum Operator des Viererimpulses $\mathbf{p}^\mu = i\mathbf{d}^\mu$:

$$i\mathbf{d} \psi_{\vec{p}}(x) \stackrel{!}{=} \not{p} \cdot \psi_{\vec{p}}(x) \quad \rightsquigarrow \psi_{\vec{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{-ipx} \cdot w(\vec{p}) \quad .$$

$w(\vec{p})$ ist ein ‘‘Spinor’’; seine Normierung wird unten diskutiert.

▷ **Übung:** Wie sieht der durch $\psi_{\vec{p}}(x)$ beschriebene Zustand in der Impulsdarstellung aus?

Wegen $(\not{p} + m)(\not{p} - m) = (\not{p} - m)(\not{p} + m) = p^2 - m^2$ gibt es Lösungen nur für $p^2 = m^2$, also nur für $p_0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ — der Spinor w hängt also nur vom Dreiervektor \vec{p} des Impulses und vom *Vorzeichen* von p_0 ab. Lösungen mit positivem/negativem p_0 bezeichnet man als Lösungen mit ‘‘positiver/negativer Frequenz’’.

Bei dieser Sprachregelung kommt es natürlich auf das Vorzeichen im Exponenten der Welle e^{-ipx} an! Anders gesagt: die Wellen $e^{-i(\pm Et - \vec{p} \cdot \vec{r})}$ sind Lösungen zu positiver/negativer Frequenz, wenn $E = |p_0| = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ bedeutet.

‘‘Negative Frequenz’’ heißt also nichts anderes, als dass die *Phasengeschwindigkeit* dieser Wellen die zum Impuls *entgegengesetzte Richtung* hat.

Diese Terminologie macht den physikalischen Sachverhalt deutlicher als die Sprechweise von ‘‘negativer Energie’’, die ja begrifflich problematisch ist (vgl. hierzu die Bemerkungen am Ende dieses Abschnitts).

Wie wir im Abschn.A gesehen haben, wäre es aus Gründen der ‘‘invarianten Integration’’ aber zweckmäßiger, das Vorzeichen von p_0 ein für alle Mal als *positiv* festzulegen. Will man gleichzeitig die Phase $(\pm Et - \vec{p} \cdot \vec{r})$ weiterhin in der Lorentz-invarianten Form $px = (p_0 t - \vec{p} \cdot \vec{r})$ schreiben, so muß man für die Wellen negativer Frequenz offenbar einfach Eigenfunktionen des Impulsoperators \mathbf{p} zu $(-\vec{p})$ statt zu $(+\vec{p})$ betrachten⁷. Die zugehörigen Wellenfunktionen haben dann die Form

$$e^{-i((-Et) - (-\vec{p}) \cdot \vec{r})} = e^{-i(-p_0)t + \vec{p} \cdot \vec{r}} = e^{+ipx} \quad .$$

Wir legen deshalb nun die Notation so fest, dass die betrachteten Lösungen der Dirac-Gleichung für *positive* bzw. *negative* Frequenzen gleichzeitig Eigenfunktionen des Impulsoperators mit Eigenwert $(+\vec{p})$ bzw. $(-\vec{p})$ sein sollen [$p_0 > 0$ in beiden Fällen]⁸:

$$\begin{aligned} i\mathbf{d}^\mu \psi_{+\vec{p}}^{(+)}(x) &\stackrel{!}{=} +p^\mu \cdot \psi_{+\vec{p}}^{(+)}(x) \\ \rightsquigarrow \psi_{+\vec{p}}^{(+)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{-ipx} \cdot w^{(+)}(\vec{p}) \quad \rightsquigarrow \quad (+\not{p} - m) w^{(+)}(\vec{p}) = 0 \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} i\mathbf{d}^\mu \psi_{-\vec{p}}^{(-)}(x) &\stackrel{!}{=} -p^\mu \cdot \psi_{-\vec{p}}^{(-)}(x) \\ \rightsquigarrow \psi_{-\vec{p}}^{(-)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{+ipx} \cdot w^{(-)}(\vec{p}) \quad \rightsquigarrow \quad (-\not{p} - m) w^{(-)}(\vec{p}) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3b)$$

⁷Das ist selbstverständlich keine Einschränkung der Allgemeinheit, sondern lediglich eine Definitionssache — wir betrachten ja in jedem Fall *alle* mögliche Werte von \vec{p} .

⁸Die meisten Autoren benutzen diese Notation, weil dann die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen der Spinoren (vgl. unten) sehr viel übersichtlicher werden.

Der Nachteil ist, dass die Notation physikalisch nicht mehr so transparent ist: die Spinoren $w^{(-)}(\vec{p})$ gehören zu ‘‘negativen Frequenzen’’, obwohl per Definition $p_0 > 0$ ist, und zum Impuls $(-\vec{p})$, obwohl ihr Argument als $(+\vec{p})$ geschrieben wird.

In dieser Notation hat also eine Lösung *negativer* Frequenz mit dem *Impuls* $(+\vec{p})$ die Form $\frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{ip_0 t + i\vec{p}\vec{r}} w^{(-)}(-\vec{p})$.

Mit Benutzung der in Gl.(2) definierten Projektionsoperatoren P_{\pm} lauten die Dirac-Gleichungen für die Spinoren $w^{(\pm)}(\vec{p})$ also:

$$(\not{p} \mp m)w^{(\pm)}(\vec{p}) = \{(p_0 \mp m)P_+ - (p_0 \pm m)P_- - \vec{\gamma}\vec{p}\} w^{(\pm)}(\vec{p}) = 0 \quad .$$

Wie man im Folgenden sehen kann, kommt die Kombination $\psi^\dagger \gamma_0$ weitaus häufiger vor als ψ^\dagger allein. Es ist dafür deshalb eine Abkürzung ganz allgemein gebräuchlich:

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma_0 \quad [\text{gesprochen "Psi quer"}] \quad .$$

Sie ist auch bei den im nächsten Abschnitt eingeführten Spinoren $w^{(\pm)}(\vec{p})$ gemeint.

B 2 Spinorenbasis

Bevor wir im Raum \mathcal{S} der Spinoren (also einem 4-dimensionalen Vektorraum) eine Basis konstruieren können, muß zunächst ein geeignetes *Skalarprodukt* in diesem Raum definiert sein. Wie von der Diskussion der Lorentz-Invarianz der Dirac-Gleichung bekannt, ist dafür der Ausdruck $\bar{\psi}_1 \cdot \psi_2$ zu nehmen⁹, wobei $\bar{\psi} := \psi^* \gamma_0$ [$\bar{\psi}$ heißt der "zu ψ adjungierte Spinor"].

Wir könnten nun einfach 4 beliebige linear unabhängige Vektoren in \mathcal{S} als Basissystem wählen, z.B. (in der im Absch.B 1 genannten Darstellung der γ -Matrizen) einfach die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (4)$$

Zweckmäßiger ist es aber (wie immer in der Quantenmechanik), als Basis ein System von Eigenvektoren geeigneter (selbstadjungierter, vertauschbarer) Operatoren (im Raum der Spinoren!) zu wählen. Besonders eignen sich dazu immer die Projektionsoperatoren auf physikalisch definierte Teilräume.

Aus diesen Bemerkungen wird deutlich, warum die Spinoren¹⁰

$$w^{(\pm)}(\vec{p}) := \frac{\pm \not{p} + m}{2m} w \quad [w \text{ ein beliebiger Spinor}] \quad (5)$$

dabei besonders geeignet sind. Denn die $w^{(\pm)}$ sind, wie man sofort sieht, Lösungen der Dirac-Gleichung, und zwar *für alle* w :

$$(\pm \not{p} - m)w^{(\pm)}(\vec{p}) = (\pm \not{p} - m) \frac{\pm \not{p} + m}{2m} w = \frac{p^2 - m^2}{2m} w = 0 \quad .$$

$w^{(+)}(\vec{p})$ ist Lösung zu positiver, $w^{(-)}(\vec{p})$ zu negativer Frequenz.

⁹ $\bar{\psi}_1$ ist ein Zeilenvektor, ψ_2 ein Spaltenvektor; $\bar{\psi}_1 \cdot \psi_2$ bedeutet also wie bei Vektoren komponentenweise Multiplikation und Addition.

Man beachte weiter, dass diese Skalarprodukt-Definition eine (vielleicht unerwartete) Folge hat: ein Operator A ist im Sinne dieses Skalarprodukts *selbstadjungiert*, wenn $A^\dagger = \gamma_0 A \gamma_0$ gilt (nachrechnen!).

¹⁰ Der Faktor $\frac{1}{2m}$ dient nur der Normierung: $\frac{\pm \not{p} + m}{2m} \Big|_{|\vec{p}|=0} \longrightarrow P_{\pm}$.

Man rechnet leicht nach, dass die hierbei auftretenden Operatoren

$$\Lambda_{\pm} := \frac{\pm \not{p} + m}{2m}$$

tatsächlich *Projektionsoperatoren* sind:

$$(\Lambda_{\pm})^{\dagger} = \gamma_0 \Lambda_{\pm} \gamma_0 \quad , \quad (\Lambda_{\pm})^2 = \Lambda_{\pm} \quad , \quad \Lambda_+ \cdot \Lambda_- = \Lambda_- \cdot \Lambda_+ = \mathbf{0} \quad , \quad \Lambda_+ + \Lambda_- = \mathbf{1} \quad .$$

Die Λ_{\pm} sind also die Verallgemeinerungen der Projektionsoperatoren P_{\pm} ; sie projizieren jeweils auf den Unterraum der Zustände mit positiver bzw. negativer Frequenz — im Ruhesystem des Teilchens sind das die “oberen” bzw. “unteren” Komponenten.

▷ **Übung:** Man mache sich die letzte Aussage explizit klar.

In jedem der beiden (2-dimensionalen) Unterräume können wir jetzt eine beliebige Basis wählen¹¹ — weder die Projektionsoperatoren Λ_{\pm} noch die Dirac-Gleichung selbst unterscheiden zwischen diesen. Es liegt also eine *2-fache Entartung* vor [Pauli-Prinzip!].

Aus der Konstruktion der Spinoren $w^{(\pm)}(\vec{p})$ [s. Gl.(5)] ist ersichtlich, dass sie zu einer festen Energie, d.h. zu einem festen Wert von p_0 gehören. Das wird noch deutlicher, wenn man die Dirac-Gleichung [für Spinoren mit positiver Frequenz] nach p_0 auflöst:

$$p_0 w^+ = \gamma^0 \left(-\gamma^k p_k + m \right) w^+ \quad .$$

Definiert man also einen “Hamilton-Operator” durch¹² $\mathbf{P}_0 := \gamma^0 (-i\gamma^k \cdot d_k + m)$, so sieht man, dass die in Gl.(3) definierten Spinoren der Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 \psi_{\pm\vec{p}}^{(\pm)}(x) &= \mathbf{P}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{\mp i p x} \cdot w^{(\pm)}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{\mp i p x} \cdot \gamma^0 (\pm p_0 \mp \not{p} + m) w^{(\pm)}(\vec{p}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} e^{\mp i p x} \cdot (\pm p_0) w^{(\pm)}(\vec{p}) = \pm E \cdot \psi_{\pm\vec{p}}^{(\pm)}(x) \end{aligned}$$

genügen.

▷ **Übung:** Nachrechnen!

Dieser Sachverhalt ist der Grund, warum Dirac von “negativen Energien” statt nur von “negativen Frequenzen” gesprochen hat. Gleichzeitig wird hieran deutlich, dass der so definierte “Hamilton-Operator” *nicht* positiv-definit ist, also den Anforderungen *nicht* genügt, die man in der Quantenmechanik an den Hamilton-Operator zu stellen hat !

¹¹Die Wahl in Gl.(4) entspricht der Klassifikation der Zustände nach Eigenzuständen des Spin (genau: der Komponente σ_3 des Spin-Operators $\vec{\sigma}$, im Ruhesystem.

¹²Hier ist wegen unserer Notationsvereinbarungen Vorsicht geboten: der zu definierende Hamilton-Operator soll eine Funktion des Impulsoperators sein — deshalb darf der Vorzeichenwechsel in \vec{p} , den wir für die Spinoren mit negativer Frequenz vereinbart hatten, hier *nicht* gemacht werden; sonst würde der Operator ja vom Zustand abhängig, auf den er wirken soll. Beachte außerdem $\text{grad} = d_k = -d^k$.

B 3 Helizität

Die Festlegung auf ein raumfestes Koordinatensystem, wie sie durch die Benutzung der Basis (4), also von Spin-Eigenzuständen im Ruhesystem, impliziert wird, ist sehr willkürlich. Es ist viel natürlicher, zur Aufhebung der Entartung zwar nach Eigenwerten des Spin zu klassifizieren, als “Quantisierungsachse” aber eine Raumrichtung zu wählen, die durch das System selber vorgegeben ist: die Richtung des räumlichen Impulses \vec{p} . Weist der Spin [genau: die z -Komponente des Spinvektors] in die Richtung von \vec{p} , so entspricht das anschaulich einer *Rechtsschraube*; man spricht von einem Zustand mit “*positiver Helizität*”¹³ oder “*Helizität* = +1”, bei umgekehrtem Spin ist die *Helizität* = -1. Das ist besonders für die Betrachtung polarisierter Teilchen eine nützliche Beschreibung.

Der Begriff *Helizität* wird präzisiert, indem man einen *Operator der Helizität* einführt; das ist einfach die 2×2 -Matrix

$$\Sigma := \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{|\vec{p}|} = \vec{\sigma} \vec{n} \quad \text{mit } \vec{n} := \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} .$$

Σ ist ein Hermite-scher Operator mit $\Sigma \cdot \Sigma = \mathbf{1}$, hat also die Eigenwerte +1 und -1. Für die Zweier-Eigenvektoren $\zeta_s(\vec{p})$ von Σ , die also der Eigenwertgleichung

$$\Sigma \zeta_s(\vec{p}) = s \cdot \zeta_s(\vec{p}) \quad , \quad s = \pm 1$$

genügen, findet man durch explizite Diagonalisierung

$$\zeta_s(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(1+sn_3)}} \begin{pmatrix} 1+sn_3 \\ s(n_1+in_2) \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2(1+sn_3)}} \frac{s(n_1+in_2)}{1-sn_3} \begin{pmatrix} s(n_1-in_2) \\ 1-sn_3 \end{pmatrix} .$$

Diese Zweier-spinoren sind auf 1 normiert und [im *zweidimensionalen* Raum der oberen bzw. unteren Komponenten] vollständig:

$$\zeta_s^*(\vec{p}) \cdot \zeta_{s'}(\vec{p}) = \delta_{ss'} \quad \sum_{s=\pm 1} \zeta_s(\vec{p}) \otimes \zeta_s^*(\vec{p}) = \mathbf{1} \quad ip \quad (6)$$

▷ **Übung:** Alles nachrechnen! Was ist, wenn die z -Achse des Koordinatensystems in Richtung des Impulses bzw. in die entgegengesetzte Richtung weist?

Konstruiert man hieraus, ganz analog wie in Gl.(4), wieder Viererspinoren, so hat man eine *physikalisch* definierte Basis im Spinorenraum [Die $N_{\pm,s}(\vec{p})$ sind noch festzulegende Normierungskonstanten]:

$$w_s^{(+)}(\vec{p}) := N_{+,s}(\vec{p}) \cdot (+\not{p} + m) w_{0,s}^{(+)}(\vec{p}) \quad w_s^{(-)}(\vec{p}) := N_{-,s}(\vec{p}) \cdot (-\not{p} + m) w_{0,s}^{(-)}(\vec{p})$$

mit

$$w_{0,s}^{(+)}(\vec{p}) := \begin{pmatrix} \zeta_s(\vec{p}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_{0,s}^{(-)}(\vec{p}) := \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_s(\vec{p}) \end{pmatrix} . \quad (7)$$

Hierbei gilt natürlich [in direkter Erweiterung von Gl.(6)]:

$$w_{0,s}^{(\pm)*}(\vec{p}) \cdot w_{0,s'}^{(\pm)}(\vec{p}) = \delta_{ss'} \quad \sum_{s=\pm 1} w_{0,s}^{(\pm)}(\vec{p}) \otimes w_{0,s}^{(\pm)*}(\vec{p}) = \mathbf{P}_{\pm} .$$

¹³helix (griech.) heißt die “Schraube”. Die Helizität ist also der ‘Schraubensinn’.

Offensichtlich bringt es keinen praktischen Vorteil, die – an sich willkürlichen und von verschiedenen Autoren verschieden gewählten – Normierungskonstanten $N_{\pm,s}(\vec{p})$ für positive und negative Frequenzen für die beiden Helizitäten oder für verschiedene Richtungen von \vec{p} unterschiedlich zu wählen. Tut man das nicht, kann N – außer von der festen Masse – nur noch von $E = p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ abhängen. Wir setzen deshalb jetzt fest (*diese* Konvention ist universell üblich):

$$N_{+,s}(\vec{p}) = N_{-,s}(\vec{p}) =: N(E) > 0 \quad ,$$

stellen aber eine Festlegung von $N(E)$ bis zur Diskussion der Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen (vgl. Abschn.B 4) zurück.

Die ganze Konstruktion hat natürlich nur Sinn für Teilchen mit nicht-verschwindendem Impuls \vec{p} — für $|\vec{p}| = 0$ ist ja keine Raumrichtung ausgezeichnet. Im Ruhesystem müssen wir uns also nach wie vor eine raumfeste Achse festgelegt denken.

▷ **Übung:** Man zeige, dass die durch Gl.(7) definierten Spinoren tatsächlich Eigenvektoren zum Helizitätsoperator $\begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma \end{pmatrix}$ sind (“Helizitäts-Zustände”).

B 4 Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen

Wie wir gesehen haben, sind die in Gl.(7) definierten Spinoren für vorgegebenen Impuls \vec{p} *Eigenzustände* zu den (vertauschbaren) Hermite-schen Operatoren

$$\begin{array}{llll} \mathbf{P}_0 & \text{(Energie)} & \text{mit den Eigenwerten} & \pm E \quad \text{und} \\ \Sigma & \text{(Helizität)} & \text{mit den Eigenwerten} & \pm 1 \quad . \end{array}$$

Diese 4 Zustände sind deshalb *orthogonal*¹⁴; weil der Hilbertraum der Spinoren gerade 4-dimensional ist, sind sie also auch *vollständig*: sie bilden eine *Basis*.

Schon der Normierung wegen rechnen wir aber die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen noch einmal explizit aus.

1. Orthogonalität

$$\begin{aligned} \overline{w_s^{(\pm)}(\vec{p})} \cdot w_{s'}^{(\pm)}(\vec{p}) &= N^2 w_{0,s}^{(\pm)*} (\pm\not{p} + m)^\dagger \gamma_0 (\pm\not{p} + m) w_{0,s'}^{(\pm)} \\ &= N^2 w_{0,s}^{(\pm)*} (\mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_-) \cdot 2m(\pm\not{p} + m) w_{0,s'}^{(\pm)} \\ &= \pm N^2 \cdot 2m \cdot w_{0,s}^{(\pm)*} (\pm\not{p} + m), w_{0,s'}^{(\pm)} \\ &= \pm N^2 \cdot 2m \cdot w_{0,s}^{(\pm)*} \mathbf{P}_\pm (\pm\not{p} + m) \mathbf{P}_\pm w_{0,s'}^{(\pm)} \\ &= \pm N^2 \cdot 2m \cdot w_{0,s}^{(\pm)*} (+p_0 \pm \not{p}\mathbf{P}_\mp + m) \mathbf{P}_\pm w_{0,s'}^{(\pm)} \\ &= \pm N^2 \cdot 2m (E + m) \delta_{ss'} \quad . \end{aligned}$$

▷ **Übung:** Nachrechnen!

¹⁴Man beachte, dass die zugehörigen Zustände in der Ortsdarstellung, d.h. die $\psi_{\pm\vec{p}}^{(\pm)}(x)$ in Gl(3), Eigenzustände des Impulsoperators zu $(\pm\vec{p})$ sind, *nicht dagegen die Spinoren* $w_s^{(\pm)}$. Die Skalarprodukte $\overline{\psi_{\pm\vec{p}}^{(\pm)}(x)} \cdot \psi_{\pm\vec{p}'}^{(\pm)}(x)$ verschwinden wegen der Orthogonalität der in ihnen enthaltenen ebenen Wellen für alle 4 Vorzeichenkombinationen, falls $\vec{p}' \neq \vec{p}$. Das bedeutet: es gibt *keine* Orthogonalitätsrelationen der $w_s^{(\pm)}(\vec{p})$ für *verschiedene* \vec{p} !

Jetzt legt man natürlich die Normierungskonstante N in Gl.(7) fest zu

$$N := \sqrt{\frac{1}{2m(E+m)}}$$

und erhält so endgültig

$$\boxed{\overline{w_s^{(\pm)}(\vec{p})} \cdot w_{s'}^{(\pm)}(\vec{p}) = \pm \delta_{ss'}} \quad . \quad (8)$$

Für die “gemischten” Skalarprodukte $w^{(\pm)} \cdot w^{(\mp)}$ erhält man mit analoger Rechnung (noch einfacher)

$$\boxed{\overline{w_s^{(\pm)}(\vec{p})} \cdot w_{s'}^{(\mp)}(\vec{p}) = 0 \quad .}$$

▷ **Übung:** Was ist $\overline{w_s^{(\pm)}(\vec{p})} \cdot w_{s'}^{(\mp)}(-\vec{p})$? [Antwort: $-s \frac{|\vec{p}|}{m} \cdot (1 - \delta_{ss'})$.]

Für das folgende nützlich sind noch die Matrixelemente von γ_0 . Man findet mit analogen Rechnungen wie oben

$$\overline{w_s^{(\pm)}(\vec{p})} \cdot \gamma_0 w_{s'}^{(\pm)}(\vec{p}) = w_s^{(\pm)*}(\vec{p}) w_{s'}^{(\pm)}(\vec{p}) = 2E(E+m) \cdot N^2 \delta_{ss'} = \frac{E}{m} \delta_{ss'} \quad ;$$

man sieht hier deutlich, dass $w^* w$ kein Lorentz-Skalar ist, sondern vielmehr die nullte Komponente eines Vierervektors (nämlich der Vierergeschwindigkeit u^μ); im Gegensatz dazu ist $\overline{w} w = \delta_{ss'}$ wirklich ein Lorentz-Skalar (was ja schon am Anfang des Abschnitts erwähnt wurde).

Die Matrixelemente von γ_0 zwischen Spinoren mit positiver und negativer Frequenz verschwinden wieder:

$$\overline{w_s^{(\pm)}(\vec{p})} \cdot \gamma_0 w_{s'}^{(\mp)}(\vec{p}) = w_s^{(\pm)*}(\vec{p}) w_{s'}^{(\mp)}(\vec{p}) = 0 \quad .$$

2. Vollständigkeit

Wir berechnen auch hier wieder die Beiträge der positiven und der negativen Frequenzen zur Vollständigkeitsrelation getrennt. Wir haben

$$\begin{aligned} \sum_s w_s^{(\pm)}(\vec{p}) \otimes \overline{w_s^{(\pm)}(\vec{p})} &= \sum_s N^2 \cdot (\pm \not{p} + m) w_{0,s}^{(\pm)}(\vec{p}) \otimes w_{0,s}^{(\pm)*}(\vec{p}) (\pm \not{p} + m)^\dagger \gamma_0 \\ &= N^2 \cdot (\pm \not{p} + m) \mathbf{P}_\pm \gamma_0 (\pm \not{p} + m) \\ &= N^2 \cdot (\pm \not{p} + m) (\pm \mathbf{P}_\pm) (\pm \not{p} + m) \\ &= \pm N^2 \cdot (\pm \not{p} + m) (+p_0 \pm \not{p} \mathbf{P}_\mp + m \mathbf{P}_\pm) \\ &= \pm N^2 \cdot (\pm \not{p} + m) (E + m \mathbf{P}_\mp + m \mathbf{P}_\pm) \\ &= \pm N^2 \cdot (E + m) (\pm \not{p} + m) \\ &= \pm \frac{\pm \not{p} + m}{2m} \\ &=: \pm \Lambda_\pm \end{aligned}$$

oder

$$\Lambda_{\pm} = \pm \sum_s w_s^{(\pm)}(\vec{p}) \otimes \overline{w_s^{(\pm)}(\vec{p})} .$$

An den hier ausführlich behandelten Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen sieht man deutlich, dass die Dirac-Gleichung zugleich positive und negative Frequenzen enthält, und dass auch die Richtung der *räumlichen Ausbreitung* der Anteile mit negativer Frequenz *dem Impuls entgegengesetzt* ist — die ist eine der Grundlagen für die Antiteilchen-Interpretation der negativen Frequenzanteile !

B 5 Wellenpakete

Wir betrachten nun die allgemeine Lösung $\Psi(x)$ der Dirac-Gleichung in der Ortsdarstellung. Nach dem obigen können wir sie in folgender Weise nach ebenen Wellen entwickeln:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \int_+ \frac{d^3\vec{k}}{2k_0} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sum_s \left\{ e^{-ik_0t} c_s^+(\vec{k}) \cdot w_s^{(+)}(\vec{k}) + e^{+ik_0t} c_{-s}^-(\vec{k}) \cdot w_s^{(-)}(-\vec{k}) \right\} .$$

Das $+$ -Zeichen am Integral soll daran erinnern, dass im Integranden k_0 immer positiv zu nehmen ist. Zu den Vorzeichen beachte man:

1. obige Entwicklung nach $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ ist eine Entwicklung nach Eigenfunktionen des Impulsoperators; wegen der Notationsvereinbarungen in Gl.(3) muß daher im Spinor $w_s^{(-)}$ das Argument $(-\vec{k})$ heißen,
2. im Gegensatz dazu sind die Vorzeichen von s und \vec{k} in $c_{-s}^-(\vec{k})$ willkürlich; wir hätten diese Entwicklungskoeffizienten genausogut $c_s^-(\vec{k})$ oder $-$ im Einklang mit der Notation im Skript “Feldquantisierung” – $d^s(\vec{k})^*$ (oder sonstwie) nennen können. Wie sich herausstellt, ist die Notation für die Zwecke dieses Abschnitts so am bequemsten.

Kann man ein Wellenpaket konstruieren, das für alle Zeiten *nur positive Frequenzen* enthält? Dazu ist zu untersuchen, welche Bedingungen an die Entwicklungskoeffizienten $c(\vec{k})$ diese Forderung zur Folge hat.

Die räumliche Fourier-Transformation von $\Psi(x)$ – zur festen Zeit t – ergibt

$$\frac{2p_0}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \Psi(x) = \sum_{s'} \left\{ e^{-ip_0t} c_{s'}^+(\vec{p}) w_{s'}^{(+)}(\vec{p}) + e^{+ip_0t} c_{-s'}^-(\vec{p}) w_{s'}^{(-)}(-\vec{p}) \right\} .$$

Mit den Orthogonalitätsrelationen (8) für die Spinoren $w(\vec{p})$ (und dem Ergebnis der dort – S.12 – gestellten Übungsaufgabe) erhält man weiter

$$\begin{aligned} A_+ &:= \frac{2p_0}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \overline{w_s^{(+)}(\vec{p})} \cdot \Psi(x) \\ &= \sum_{s'} \left\{ e^{-ip_0t} c_{s'}^+(\vec{p}) \overline{w_s^{(+)}(\vec{p})} \cdot w_{s'}^{(+)}(\vec{p}) + e^{+ip_0t} c_{-s'}^-(\vec{p}) \overline{w_s^{(+)}(\vec{p})} \cdot w_{s'}^{(-)}(-\vec{p}) \right\} \\ &= \left\{ e^{-ip_0t} c_s^+(\vec{p}) - e^{+ip_0t} \cdot s \frac{|\vec{p}|}{m} c_s^-(\vec{p}) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
A_- &:= \frac{2p_0}{\sqrt{2\pi^3}} \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \overline{w_{-s}^{(-)}(-\vec{p})} \cdot \Psi(x) \\
&= \sum_{s'} \left\{ e^{-ip_0t} c_{s'}^+(\vec{p}) \overline{w_{-s}^{(-)}(-\vec{p})} \cdot w_{s'}^{(+)}(\vec{p}) + e^{+ip_0t} c_{-s'}^-(\vec{p}) \overline{w_{-s}^{(-)}(-\vec{p})} \cdot w_{s'}^{(-)}(-\vec{p}) \right\} \\
&= \left\{ e^{+ip_0t} c_s^-(\vec{p}) + e^{-ip_0t} \cdot s \frac{|\vec{p}|}{m} c_s^+(\vec{p}) \right\} . \tag{10}
\end{aligned}$$

Löst man die Gln.(9),(10) nach den beiden Entwicklungskoeffizienten $c(\vec{p})$ auf, so erhält man schließlich ¹⁵:

$$c_s^\pm(\vec{p}) = \pm \frac{m^2}{E^2} e^{\pm ip_0t} \cdot \left(A_\pm \pm s \frac{|\vec{p}|}{m} A_\mp \right) .$$

▷ **Übung:** Nachrechnen!

Sei nun $\Psi(x)$ zur Zeit $t = 0$ ein normiertes Wellenpaket, z.B. ein Gauß-Paket:

$$\Psi(t = 0, \vec{r}) := (2\pi d^2)^{-3/4} e^{-\vec{r}^2/2d^2} w$$

mit irgendeinem (festen) Spinor w . Dann folgt für die Entwicklungskoeffizienten zur Zeit $t = 0$:

$$\begin{aligned}
c_s^\pm(\vec{p}) &= \pm \frac{m^2}{E^2} \frac{2p_0}{\sqrt{2\pi^3}} (2\pi d^2)^{-3/4} \int d^3\vec{r} e^{i\vec{p}\cdot\vec{r} - \frac{\vec{r}^2}{2d^2}} \times \left(\overline{w_{\pm s}^{(\pm)}(\pm\vec{p})} \cdot w \pm s \frac{|\vec{p}|}{m} \overline{w_{\mp s}^{(\mp)}(\mp\vec{p})} \cdot w \right) \\
&\propto e^{-\frac{d^2}{2}\vec{p}^2} \left(\overline{w_{\pm s}^{(\pm)}(\pm\vec{p})} \cdot w \pm s \frac{|\vec{p}|}{m} \overline{w_{\mp s}^{(\mp)}(\mp\vec{p})} \cdot w \right) .
\end{aligned}$$

Wenn das Wellenpaket $\Psi(x)$ für alle Zeiten nur positive Frequenzen enthalten soll, so muß $c_s^-(\vec{p})$ für alle \vec{p} und s verschwinden, woraus folgt

$$\overline{w_{-s}^{(-)}(-\vec{p})} \cdot w = s \frac{|\vec{p}|}{m} \overline{w_{+s}^{(+)}(+\vec{p})} \cdot w \quad \forall \vec{p}, s .$$

Das ist (wegen der Vollständigkeit der $w_s^{(\pm)}$) nur dann möglich, wenn w identisch verschwindet.

Es ist klar, dass für diese Überlegung die spezielle Form (Gauß-Paket) ohne Bedeutung ist; wir haben also das allgemeine Resultat, dass jedes normierbare Dirac-Wellenpaket zugleich positive und negative Frequenzen enthält, auch wenn es zu irgendeinem Anfangszeitpunkt nur aus Wellen des einen Vorzeichens der Frequenz bestanden hat.

Es ist instruktiv, dies im Einzelnen zu verfolgen. Nehmen wir also an, dass Ψ für $t = 0$ nur positive Frequenzen enthält:

$$w = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} .$$

¹⁵Man sieht schon hier, dass eine Trennung in positive und negative Frequenzen offenbar Schwierigkeiten macht: wegen des zweiten (zu $|\vec{p}|$ proportionalen) Terms kompensieren sich die Zeitabhängigkeiten in den Entwicklungskoeffizienten nicht so, wie man das vielleicht erwarten würde.

Die beiden Skalarprodukte $\overline{w_{\pm s}^{(\pm)}}(\pm\vec{p}) \cdot w$ kann man explizit ausrechnen (vgl. Gl.7); man erhält

$$\overline{w_{\pm s}^{(\pm)}}(\pm\vec{p}) \cdot w = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{cases} (E+m) \cdot \zeta_s^* \cdot \mathbf{u} \\ s|\vec{p}| \cdot \zeta_s^* \cdot \mathbf{u} \end{cases} .$$

▷ **Übung:** Nachrechnen!

Für die beiden Entwicklungskoeffizienten $c^\pm(\vec{p})$ ergibt sich somit

$$c_{\pm s}^\pm(\vec{p}) \propto e^{-\frac{d^2}{2} \vec{p}^2} \begin{cases} \frac{2m-E}{m} \cdot (E+m) \\ -\frac{2m+E}{m} \cdot s|\vec{p}| \end{cases} .$$

Das Gauß-Paket (im Impulsraum) ist nennenswert von Null verschieden nur für $d \cdot |\vec{p}| \sim 1$; für ein sehr ausgedehntes Wellenpaket ($d \gg 1/m$) bleibt also $|\vec{p}| \ll m$, und damit entwickeln sich auch die Komponenten zu negativen Frequenzen (die für $t = 0$ noch überhaupt nicht zum Wellenpaket beitragen!) im Vergleich zu denen mit positiven Frequenzen nur langsam. Ist umgekehrt das Wellenpaket sehr eng begrenzt ($d \ll 1/m$), so tragen auch sehr große Impulse bei, und die negativen Frequenzanteile werden schnell von der gleichen Größenordnung wie die positiven.

C Poincaré-Kovarianz der Dirac-Gleichung ^{*)}

Die Form der Dirac-Gleichung legt zwar nahe, dass diese Gleichung sich bei Poincaré-Transformationen (Lorentz-Transformationen + Translationen in Raum und Zeit) kovariant transformiert; formal nachgewiesen haben wir das noch nicht. Auch physikalisch haben wir bisher nur festgestellt, dass die Dirac-Gleichung für freie Teilchen mit fester Masse $m > 0$ für jedes der beiden Vorzeichen der Frequenz *zwei* linear unabhängige Lösungen hat, nämlich zur Helizität ± 1 . Der Term $\left(\frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}\right)$, der bei Ankopplung eines Dirac-Teilchens an ein äußeres Magnetfeld \vec{B} in der nichtrelativistischen Pauli-Gleichung auftritt, legt zwar die Interpretation der Pauli-Matrizen als Operatoren eines "inneren Drehimpulses", eben des spin, nahe; nachgewiesen ist auch das bisher nicht.

Diese beiden Aspekte hängen, wie sich herausstellen wird, eng miteinander zusammen. Wir werden explizit einen Zusammenhang herstellen zwischen den γ -Matrizen und den erzeugenden Operatoren der Dreh- bzw. Lorentz- bzw. Poincaré-Gruppe. Dazu brauchen wir zunächst einige Grundlagen der Gruppentheorie (hier nur stichwortartig und ohne mathematische Akribie dargestellt).

C 1 Allgemeines zu Transformationsgruppen

1. Erzeugende

Es sei G eine Lie-Gruppe, $H \subset G$ eine *einparametrische* Untergruppe, d.h. jedes Element $h \in H$ lässt sich umkehrbar eindeutig durch *einen* (reellen) Parameter festlegen:

$$h = h(\alpha) .$$

^{*)}Dieses Kapitel kann beim ersten Lesen überschlagen werden.

Man kann die Parametrisierung immer so wählen, dass

$$\begin{aligned} h(\alpha)h(\beta) &= h(\beta)h(\alpha) = h(\alpha + \beta) \quad , \\ h(0) &= \mathbb{1} \quad . \end{aligned}$$

Dann nennt man ¹⁶

$$\mathbf{A} := \frac{1}{i} \frac{d}{d\alpha} h(\alpha) \Big|_{\alpha=0}$$

die “Erzeugende” (den “erzeugenden Operator”, engl. “generator”) der Untergruppe H . Mit obiger Parametrisierung kann man offenbar schreiben

$$h(\alpha) = e^{i\alpha\mathbf{A}} \quad .$$

Die Algebra der Erzeugenden der verschiedenen einparametrischen Untergruppen einer Lie-Gruppe G (“Lie-Algebra”), d.h. deren Vertauschungsrelationen, erhält man, indem man die ‘Kommutatoren’ ($h_1^{-1} \circ h_2^{-1} \circ h_1 \circ h_2$) bis zur 2. Ordnung entwickelt ¹⁷:

$$\begin{aligned} h_1^{-1} h_2^{-1} h_1 h_2 &= e^{-i\alpha^1 \mathbf{A}_1} e^{-i\alpha^2 \mathbf{A}_2} e^{i\alpha^1 \mathbf{A}_1} e^{i\alpha^2 \mathbf{A}_2} \\ &= \mathbb{1} + \alpha^1 \alpha^2 (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1) + \mathcal{O}(\alpha^3) \\ &=: \mathbb{1} + \alpha^1 \alpha^2 [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2] + \mathcal{O}(\alpha^3) \quad . \end{aligned}$$

Auch wenn die Erzeugenden \mathbf{A}_k der verschiedenen Untergruppen nicht untereinander vertauschen, lässt sich jedes Element $g \in G$ eindeutig ¹⁸ schreiben als $g = \sum_k \alpha^k \mathbf{A}_k$; nur gilt dann natürlich nicht etwa $e^{\sum_k \alpha^k \mathbf{A}_k} \stackrel{?}{=} \prod_k e^{\alpha^k \mathbf{A}_k}$!

2. Darstellungen

Sei nun G speziell eine (lineare) *Transformationsgruppe* der Koordinaten x eines vorgegebenen Raumes (in der Physik z.B. der Minkowski-Raum); d.h. die Elemente $\mathbf{T} \in G$ sind Transformationen dieses Raumes auf sich:

$$x \mapsto x' = \mathbf{T}x \quad .$$

Es sei weiter ein – zunächst einkomponentiges, also *skalares – Feld* $\Phi(x)$ auf diesem Raum gegeben. Dieses transformiert sich dann unter \mathbf{T} so, dass ¹⁹

$$\Phi \xrightarrow{\mathbf{T}} \hat{\Phi} \quad \rightsquigarrow \quad \hat{\Phi}(x') = \Phi(x)$$

oder, einfacher geschrieben,

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(\mathbf{T}^{-1}x) \quad .$$

¹⁶Dies ist die in der Physik allgemein übliche Notation. Mit ihr wird $h(\alpha) = e^{i\alpha\mathbf{A}}$ unitär, wenn \mathbf{A} Hermitesch ist. Mathematiker definieren stattdessen meist

$$\mathbf{A} := \frac{d}{d\alpha} h(\alpha) \Big|_{\alpha=0} \quad .$$

¹⁷ α^k heisst hier “ α mit oberem Index k ”, nicht etwa “ α hoch k ” !

¹⁸unter der Voraussetzung, dass G einfach zusammenhängend ist.

¹⁹Die geometrische Bedeutung von \mathbf{T} ist ja: der Wert des transformierten Feldes an der transformierten Stelle ist gleich dem Wert des ursprünglichen Feldes an der ursprünglichen Stelle.

ist. Durch diese Abbildung ist eine *Darstellung* der Lie-Gruppe gegeben: man kann ja \mathbf{T} formal als Operator im Hilbertraum der $\Phi(x)$ schreiben: $\hat{\Phi} = \mathbf{T} \circ \Phi$.

Vergleicht man nun ²⁰ – für infinitesimale \mathbf{T} –

$$\hat{\Phi} = \mathbf{T} \circ \Phi = \left[\mathbb{1} + i\alpha^k \mathbf{A}_k \right] \circ \Phi$$

mit der Taylor-Entwicklung bis zur 1. Ordnung von $\Phi(\mathbf{T}^{-1}x)$ an der Stelle x , so liest man unmittelbar die zugehörige Darstellung der Erzeugenden Operatoren \mathbf{A}_k ab. Hieraus kann man sich dann auch am einfachsten die Vertauschungsrelationen der \mathbf{A}_k berechnen.

Ist das Feld nicht einkomponentig, sondern mehrkomponentig: $[\psi^k(x) | k = 1, \dots, n]$, so werden im Allgemeinen als Resultat der Anwendung von \mathbf{T} Linearkomponenten der ursprünglichen Komponenten von ψ auftreten:

$$\psi \xrightarrow{\mathbf{T}} \hat{\psi} \quad , \quad \hat{\psi}^k(x') = S^k_m(\mathbf{T})\psi^m(x) \quad ;$$

mit einer von \mathbf{T} abhängigen Matrix S , die natürlich im Einzelnen von der Definition des Feldes abhängt. Zur Berechnung der Darstellungsoperatoren der Erzeugenden muss man entsprechend $\psi(\mathbf{T}^{-1}x)$ in

$$\hat{\psi}^k(x) = S^k_m(\mathbf{T})\psi^m(\mathbf{T}^{-1}x)$$

entwickeln.

C 2 Die Algebra der Poincaré-Gruppe

Die Poincaré-Gruppe (auch “inhomogene Lorentz-Gruppe” genannt) besteht aus den Abbildungen

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

des Minkowski-Raums auf sich, wobei Λ eine Lorentz-Transformation, also eine Transformation mit der Eigenschaft

$$\Lambda^\rho_\nu \Lambda_\rho^\mu = \Lambda^\mu_\rho \Lambda_\nu^\rho = \delta^\mu_\nu$$

und a^μ eine konstante (vierdimensionale) Translation ist ²¹. Das Verknüpfungsgesetz ergibt sich unmittelbar aus der geometrischen Bedeutung:

$$(\Lambda_2, a_2) \circ (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \quad .$$

Die Gruppe hat offenbar 10 Erzeugende: 4 für die Translationen (= Impulse) und 6 für die Lorentz-Transformationen, darunter die 3 Erzeugenden der Untergruppe O_3^+ der räumlichen Drehungen (= Drehimpuls); die anderen 3 sind offenbar die Erzeugenden der Lorentz-boosts in den drei räumlichen Richtungen.

Wir betrachten zunächst die Translationen: $x' = \mathbf{T}x := x + a$ und ihre Wirkung auf ein Skalarfeld $\Phi(x)$. Die Erzeugenden sollen \mathbf{P}_μ heißen. Es ist also $\mathbf{T} = e^{i\alpha^\mu \mathbf{P}_\mu}$ oder

$$\mathbf{T}\Phi = (\mathbb{1} + i\alpha^\mu \mathbf{P}_\mu)\Phi + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad .$$

Andererseits ist

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(\mathbf{T}^{-1}x) = \Phi(x - a) = \Phi(x) - a^\mu \cdot d_\mu \Phi|_x + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad ,$$

²⁰Wir benutzen ab jetzt die Summenkonvention in der üblichen Weise: $\alpha^k \mathbf{A}_k$ steht für $\sum_k \alpha^k \mathbf{A}_k$.

²¹Wir beschränken uns immer auf den topologisch zusammenhängenden Teil der Gruppe, d.h. auf reine, orthochrone Lorentz-Transformationen ($L^{+1} : \Lambda^0_0 \geq 1, \det \Lambda = +1$). Die in der vollen Lorentz-Gruppe enthaltenen diskreten Transformationen Paritäts- und Zeitumkehr werden also nicht betrachtet.

woraus folgt

$$\boxed{\mathbf{P}_\mu = i d_\mu} \quad , \quad (11)$$

wie schon aus der nichtrelativistischen Quantenmechanik bekannt.

Für die Lorentz-Gruppe haben wir für infinitesimale Λ

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \mathcal{O}(\omega^2) \quad ,$$

wobei

$$\omega^\mu{}_\nu + \omega_\nu{}^\mu = 0 \quad .$$

Die Transformationen der Koordinaten x^μ und eines Skalarfelds $\Phi(x)$ schreiben sich als

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \mathcal{O}(\omega^2)$$

bzw.

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(\Lambda^{-1}x) = \Phi(x - \omega x) = \Phi(x) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu \cdot d_\mu \Phi|_x + \mathcal{O}(\omega^2) \quad ;$$

für Letzteres können wir wegen der Antisymmetrie der $\omega^\mu{}_\nu$ auch schreiben (nebst einmal Index-ziehen):

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(x) - \frac{1}{2} \omega^\mu{}_\nu (x^\nu d^\mu - x^\mu d^\nu) \Phi|_x + \mathcal{O}(\omega^2) \quad ,$$

Die Erzeugenden sollen $\mathbf{M}^{\mu\nu}$ heissen; wir schreiben – wieder wegen der Antisymmetrie der $\omega^\mu{}_\nu$ –

$$\mathbf{T} = e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathbf{M}^{\mu\nu}} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{T} \Phi = \left(1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathbf{M}^{\mu\nu} \right) \Phi + \mathcal{O}(\omega^2) \quad . \quad (12)$$

für $\mathbf{M}^{\mu\nu}$ erhalten wir daraus

$$\boxed{\mathbf{M}^{\mu\nu} = i(x^\mu d^\nu - x^\nu d^\mu)} \quad , \quad (13)$$

also die Verallgemeinerung des aus der nichtrelativistischen Quantenmechanik wohlbekannten Ausdrucks für den Bahndrehimpuls.

Man erhält hieraus durch einfaches Ausrechnen die gesamten Vertauschungsrelationen der Poincaré-Gruppe ($\eta^{\mu\nu}$ ist der metrische Tensor des Minkowski-Raums):

$$\boxed{\begin{aligned} [\mathbf{P}^\mu, \mathbf{P}^\rho] &= 0 \\ [\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{P}^\rho] &= i(\eta^{\rho\nu} \mathbf{P}^\mu - \eta^{\rho\mu} \mathbf{P}^\nu) \\ [\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{M}^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\rho\nu} \mathbf{M}^{\mu\sigma} - \eta^{\rho\mu} \mathbf{M}^{\nu\sigma} + \eta^{\sigma\nu} \mathbf{M}^{\rho\mu} - \eta^{\sigma\mu} \mathbf{M}^{\rho\nu}) \end{aligned}} \quad . \quad (14)$$

Die Vertauschungsrelationen zwischen \mathbf{M} und \mathbf{P} besagen einfach, dass \mathbf{P} ein Vektoroperator bzgl. \mathbf{M} ist (also ein Vierervektor), die zwischen den \mathbf{M} 's, dass \mathbf{M} selbst ein (antisymmetrischer) Tensoroperator bzgl. \mathbf{M} ist.

Wir haben diese Vertauschungsrelationen aus den expliziten Ausdrücken (11) und (13) für Impuls bzw. Drehimpuls abgeleitet, die ihrerseits ihre Begründung in der geometrischen Bedeutung der betreffenden Transformationen für ein Skalarfeld fanden. Insofern sind die Vertauschungsrelationen (14) Ausdruck der Geometrie der Poincaré-Transformationen; es ist

deshalb legitim, sie auch für den allgemeinen Fall von mehrkomponentigen Feldern als *die Definition* der Poincaré-Algebra anzusehen.

In die Schlussfolgerungen der beiden folgenden Abschnitte (Abschn. C 3, C 4) gehen lediglich die Vertauschungsrelationen (14) ein, nicht aber die expliziten Formen (11) und (13). Insoweit ist unserer Darstellung eine unmittelbare Verallgemeinerung des zuerst von Dirac in die Quantenmechanik eingeführten Vorgehens bei der Analyse des Drehimpulses in der nichtrelativistischen Quantenmechanik.

C 3 Die (endlich-dimensionalen) irreduziblen Darstellungen der Lorentz-Gruppe

$\mathbf{M}^{\mu\nu}$ ist antisymmetrisch: $\mathbf{M}^{\mu\nu} + \mathbf{M}^{\nu\mu} = 0$. Die Lorentz-Gruppe hat also 6 Erzeugende, 3 rein räumliche, und 3 mit einem zeitlichen und einem räumlichen Index. Mit

$$\mathbf{J}_1 := \mathbf{M}^{23} \quad . \quad \quad \quad \mathbf{J}_2 := \mathbf{M}^{31} \quad . \quad \quad \quad \mathbf{J}_3 := \mathbf{M}^{12}$$

sowie

$$\mathbf{K}_1 := \mathbf{M}^{01} \quad . \quad \quad \quad \mathbf{K}_2 := \mathbf{M}^{02} \quad . \quad \quad \quad \mathbf{K}_3 := \mathbf{M}^{03}$$

lauten die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\mathbf{J}_k, \mathbf{J}_m] &= i\epsilon_{kmn} \mathbf{J}^n \\ [\mathbf{J}_k, \mathbf{K}_m] &= i\epsilon_{kmn} \mathbf{K}^n \\ [\mathbf{K}_k, \mathbf{K}_m] &= -i\epsilon_{kmn} \mathbf{J}^n \quad . \end{aligned} \quad (15)$$

In der ersten Zeile stehen die bekannten Vertauschungsrelationen des Drehimpulsoperators, in der zweiten Zeile die eines Vektoroperators bzgl. $\vec{\mathbf{J}}$. Die dritte Zeile ²² zeigt, dass Lorentz-boosts in verschiedene Raumrichtungen *keine* Untergruppe bilden: das Resultat zweier nacheinander ausgeführten boosts in verschiedene Richtungen ist *kein* reiner boost (vgl. „Thomas-Präzession“!).

Die Algebra lässt sich auf eine – jedenfalls für die Konstruktion der Darstellungen – viel einfachere Form bringen, wenn man noch einmal substituiert:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{U}} &:= \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{J}} + i\vec{\mathbf{K}}) \\ \vec{\mathbf{V}} &:= \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{J}} - i\vec{\mathbf{K}}) \quad . \end{aligned}$$

Dann wird aus den Vertauschungsrelationen (15)

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_m] &= i\epsilon_{kmn} \mathbf{U}^n \\ [\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_m] &= i\epsilon_{kmn} \mathbf{V}^n \\ [\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_m] &= 0 \quad , \end{aligned}$$

²²Das Minuszeichen ist charakteristisch für die Lorentz-Gruppe; mit einem Pluszeichen wäre das die Algebra der $O(4)$.

die Algebra ist also die einer $SU(2) \times SU(2)$, und man kann deren bekannte Darstellungen (samt der gesamten Drehimpuls-Gymnastik) unmittelbar übernehmen. Die Casimir-Operatoren²³ sind \vec{U}^2 und \vec{V}^2 ; man erhält also (endlich-dimensionale) irreduzible Darstellungen zu allen ganz- oder halbzahligen nicht-negativen Werten der Indizes u, v , mit $\vec{U}^2 = u(u+1) \cdot \mathbb{1}$, $\vec{V}^2 = v(v+1) \cdot \mathbb{1}$, mit den Dimensionen $d = (2u+1) \cdot (2v+1)$. Die niedrigsten sind:

(u, v)	d	Name
$(0, 0)$	1	Skalar
$(0, \frac{1}{2})$	2	2-komponentiger Spinor
$(\frac{1}{2}, 0)$	2*	”
$(0, 1)$	3	(räumlicher) Vektor
$(1, 0)$	3*	”
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	4	Dirac-Spinor
$(0, \frac{3}{2})$	4 ₂	
$(\frac{3}{2}, 0)$	4 ₂ *	

Welche physikalische Bedeutung welche Darstellung hat, sieht man erst bei der Betrachtung der vollen Poincaré-Algebra und der zugehörigen Felder.

Manchmal sind die Casimir-Operatoren auch in der Form nützlich, wie man sie direkt aus den $\mathbf{M}^{\mu\nu}$ erhält (ganz analog wie bei dem antisymmetrischen Feldtensor der Elektrodynamik!):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^2 &:= \frac{1}{4} \mathbf{M}_{\mu\nu} \mathbf{M}^{\mu\nu} & \Rightarrow & \quad \mathbf{M}^2 = \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{J}}^2 - \vec{\mathbf{K}}^2) = \frac{1}{2} (\vec{\mathbf{U}}^2 + \vec{\mathbf{V}}^2) \\ \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{M} &:= \frac{1}{4} \tilde{\mathbf{M}}_{\mu\nu} \mathbf{M}^{\mu\nu} := \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathbf{M}^{\rho\sigma} \mathbf{M}^{\mu\nu} & \Rightarrow & \quad \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{M} = 2\vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{K}} = -2i(\vec{\mathbf{U}}^2 - \vec{\mathbf{V}}^2) \end{aligned}$$

C 4 Die Invarianten der Poincaré-Algebra

Wir suchen wieder die Casimir-Operatoren. Offensichtlich ist $\mathbf{P}^2 := \mathbf{P}_\mu \mathbf{P}^\mu$ ein solcher:

$$[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{P}^2] = 0 \quad , \quad [\mathbf{P}^\mu, \mathbf{P}^2] = 0 \quad ;$$

dagegen vertauschen die beiden Invarianten der Lorentz-Algebra *nicht* mit den Impulsen:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}^2, \mathbf{P}^\rho] &= \frac{i}{2} (\mathbf{M}^{\mu\rho} \mathbf{P}_\mu + \mathbf{P}_\mu \mathbf{M}^{\mu\rho}) \\ [\tilde{\mathbf{M}}\mathbf{M}, \mathbf{P}_\rho] &= i\tilde{\mathbf{M}}_{\mu\rho} \mathbf{P}^\mu \quad . \end{aligned} \quad (16)$$

Nochmaliges Vertauschen der rechten Seite von (16) mit \mathbf{P}_μ ergibt, mit der Abkürzung

$$\mathbf{W}_\rho := \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{M}}_{\mu\rho} \mathbf{P}^\mu \quad , \quad (17)$$

$$[\mathbf{W}_\rho, \mathbf{P}^\nu] = i\epsilon_{\rho\nu\sigma\tau} \mathbf{P}^\sigma \mathbf{P}^\tau = 0 \quad ;$$

man muss also nur aus \mathbf{W}_μ einen Lorentz-Skalar machen, um zu einer Invariante zu kommen. Man setzt natürlich $\mathbf{W}^2 := \mathbf{W}_\mu \mathbf{W}^\mu$ und erhält so

$$[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{W}^2] = 0 \quad , \quad [\mathbf{P}^\mu, \mathbf{W}^2] = 0 \quad .$$

²³Ein *Casimir-Operator* ist ein aus den Erzeugenden gebildeter (im einfachsten Fall quadratischer) Operator, der mit sämtlichen Erzeugenden der Algebra vertauscht; nach dem Schur-schen Lemma ist er daher in einer irreduziblen Darstellung ein Vielfaches der Einheitsmatrix.

Hieraus folgt auch gleich

$$[\mathbf{P}^2, \mathbf{W}^2] = 0 \quad ,$$

so dass die Eigenwerte von \mathbf{P}^2 und \mathbf{W}^2 zur Charakterisierung der irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Algebra dienen können. Anders ausgedrückt:

Die Lösungen einer gegenüber Poincaré-Transformationen kovarianten Wellengleichung zu festen Eigenwerten von \mathbf{P}^2 und \mathbf{W}^2 spannen irreduzible Darstellungen der Poincaré-Algebra auf.

Der Eigenwert von \mathbf{P}^2 ist offensichtlich gerade m^2 , wobei m die Masse des durch diese Gleichung beschriebenen Teilchens ist.

Was bedeutet der Eigenwert von \mathbf{W}^2 ? Zur Beantwortung dieser Frage werten wir \mathbf{W}^2 im Ruhesystem aus ²⁴:

$$\mathbf{W}_\rho = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}\mathbf{M}^{\sigma\tau}\mathbf{P}^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{0\mu\rho\sigma}\mathbf{M}^{\sigma\tau}\mathbf{P}^0\Big|_{\text{r.s.}} = m \cdot (0, \vec{\mathbf{J}})\Big|_{\text{r.s.}}$$

\leadsto

$$\mathbf{W}^2 = -m^2 \cdot \vec{\mathbf{J}}^2\Big|_{\text{r.s.}} \quad .$$

Die Eigenwerte von \mathbf{W}^2 sind also gegeben durch

$$\boxed{\mathbf{W}^2 = -m^2 \cdot s(s+1)} \quad ; \quad (18)$$

hierbei ist s die ‘‘Drehimpulsquantenzahl’’ zum Operator $\vec{\mathbf{J}}$ im Ruhesystem des – punktförmigen! – Teilchens; das ist der *spin*.

Mit dieser Aussage haben wir den einen Teil der am Anfang des ganzen Abschnitts C gestellten Frage beantwortet, nämlich die nach dem Zusammenhang zwischen den *mathematischen* Eigenschaften der Poincaré-Gruppe und den *physikalischen* Eigenschaften der durch eine Poincaré-kovariante Wellengleichung beschriebenen Teilchen: die Eigenwerte der die Lösungen charakterisierenden Invarianten $\vec{\mathbf{P}}^2$ und $\vec{\mathbf{W}}^2$ sind im Wesentlichen die *Masse* und der *spin*.

C 5 Das Transformationsverhalten von Dirac-Spinoren

Es bleibt nun noch, den Zusammenhang klarzustellen zwischen der abstrakten Operator-Algebra der Erzeugenden der Poincaré-Gruppe und dem Transformationsverhalten von Dirac-Spinoren, konkret also: die Verallgemeinerung von (11) bzw. (13) für Dirac-Spinoren zu finden.

Für die Translationen ergibt sich dabei gegenüber dem in Abschn. C 2 Gesagten nichts Neues; das Resultat (11) bleibt deshalb auch für mehrkomponentige Felder unverändert. Wir können uns im Folgenden daher auf Lorentz-Transformationen beschränken.

Wie in Abschn. 2. dargelegt, transformiert sich ein mehrkomponentiges Feld $\psi(x)$ unter Lorentz-Transformationen $x \xrightarrow{L} x' = \Lambda x$ gemäß

$$\hat{\psi}^k(x') = \hat{\psi}^k(\Lambda x) = S^k_m \psi^m(x) \quad ,$$

²⁴Wir setzen jetzt $m \neq 0$ voraus. Der Fall masseloser Teilchen, die der Dirac-Gleichung genügen (Neutrinos!?) bedarf einer gesonderten Untersuchung, die hier zu weit führen würde.

wobei die Matrix S^k_m so zu bestimmen ist, dass die Dirac-Gleichung kovariant ²⁵ bleibt:

$$(i\mathcal{d} - m)\psi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (i\mathcal{d}' - m)\hat{\psi}(x') = 0 \quad .$$

Für den Gradienten gilt $d^\mu = \Lambda^\mu_\nu d'^\nu$, oder kurz $d = \Lambda d'$. Setzt man das in die Dirac-Gleichung ein ²⁶, so erhält man

$$0 = (i\Lambda\mathcal{d}' - m)\psi(x) = (i\Lambda\mathcal{d}' - m)S^{-1}\hat{\psi}(x') \quad ,$$

woraus folgt

$$(iS\Lambda\mathcal{d}'S^{-1} - m)\hat{\psi}(x') = 0 \quad ;$$

es muss also gelten

$$S\Lambda\mathcal{d}'S^{-1} \stackrel{!}{=} \mathcal{d}'$$

oder

$$S\Lambda\gamma S^{-1} \stackrel{!}{=} \gamma$$

bzw.

$$\boxed{S^{-1}\gamma S \stackrel{!}{=} \Lambda\gamma} \quad . \quad (19)$$

Setzt man $S =: e^{it} = \mathbb{1} + it + \mathcal{O}(t^2)$, so wird die Bedingung (19) in 1. Ordnung zu

$$(1 - it)\gamma^\mu(1 + it) = \gamma^\mu + \omega^\mu_\nu \gamma^\nu$$

\leadsto

$$i(\gamma^\mu t - t\gamma^\mu) = \omega^\mu_\nu \gamma^\nu = \eta^{\mu\rho} \omega_{\rho\nu} \gamma^\nu \quad .$$

Man rechnet leicht nach, dass ²⁷

$$t = -\frac{1}{4}\omega_{\rho\nu}\sigma^{\rho\nu} \quad \text{mit} \quad \sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$$

die Bedingung erfüllt; da die γ -Matrizen aber – bis auf Ähnlichkeitstransformationen – eindeutig sind, ist auch t entsprechend festgelegt.

Wir haben also

$$S = \mathbb{1} - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega^2)$$

bzw.

$$\boxed{S = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}} \quad .$$

²⁵Eine etwas veraltete, aber anschauliche Bezeichnung dafür ist “forminvariant”.

²⁶Die γ -Matrizen sind bis auf eine Ähnlichkeitstransformation eindeutig. Es ist daher keine Einschränkung, wenn wir festlegen, dass die γ -Matrizen in allen Lorentz-Systemen die gleichen sein sollen; wir benutzen ja nur ihre algebraischen Eigenschaften, nicht eine explizite Form.

Zur Abkürzung lassen wir ab jetzt auch die Indizes der Matrix S^k_m weg und schreiben einfach S . S ist eine 4×4 -Matrix wie die γ -Matrizen; ja, wir werden gleich finden, dass S eine Linearkombination von ihnen ist.

²⁷Man beachte genau die Notation: σ ist ein antisymmetrischer Tensor im Minkowski-Raum, hat also 6 unabhängige Elemente $\sigma^{\mu\nu}$. Jedes dieser Elemente ist seinerseits eine Linearkombination von Dirac-Matrizen, ist also eine 4-Matrix! Diese wirkt aber *nicht* im Minkowski-Raum, sondern im Raum der Spinoren.

C 6 Der spin des Dirac-Felds

In Abschn. C 2 hatten wir gesehen (vgl. Gl.12), wie die Elemente der Lorentz-Gruppe dargestellt werden können in der Form

$$\hat{\psi} \mapsto \psi = \mathbf{T} \circ \psi = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbf{M}^{\mu\nu}} \circ \psi = \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbf{M}^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega^2)\right) \circ \psi ; \quad (20)$$

auf der andern Seite haben wir im letzten Abschnitt gefunden, dass $\hat{\psi}(x') = \hat{\psi}(\Lambda x) = S\psi(x)$ ist, also $\hat{\psi}(x) = S\psi(\Lambda^{-1}x)$, mit $S = e^{-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}} = \left(1 - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega^2)\right)$. Um diese beiden Ausdrücke vergleichen zu können, entwickeln wir $\psi(\Lambda^{-1}x)$ wieder in eine Taylorreihe:

$$\begin{aligned} \psi(\Lambda^{-1}x) &= \psi(x^\mu - \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \mathcal{O}(\omega^2)) = \psi(x^\mu) - \omega^\mu{}_\nu x^\nu d_\mu \psi|_x + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &= \psi(x^\mu) - \omega_{\mu\nu} x^\nu d^\mu \psi|_x + \mathcal{O}(\omega^2) , \end{aligned}$$

was wir wegen der Antisymmetrie von ω auch schreiben können als

$$\psi(\Lambda^{-1}x) = \left(1 + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(x^\mu d^\nu - x^\nu d^\mu) + \mathcal{O}(\omega^2)\right) \psi(x) .$$

Wir finden so

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) &= S\psi(\Lambda^{-1}x) = \left(1 - \frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\omega^2)\right) \left(1 + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(x^\mu d^\nu - x^\nu d^\mu) + \mathcal{O}(\omega^2)\right) \psi(x) \\ &= \psi(x) - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} \left[i(x^\mu d^\nu - x^\nu d^\mu) + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\right] \psi(x) + \mathcal{O}(\omega^2) . \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich mit (20) zeigt, dass in der spinor-Darstellung (die von den Lösungen der Dirac-Gleichung aufgespannt werden) die Erzeugenden der Lorentz-Gruppe die Form

$$\mathbf{M}^{\mu\nu} = i(x^\mu d^\nu - x^\nu d^\mu) + \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$$

haben. Physikalisch ausgedrückt heisst das:

In der – durch die Lösungen der Dirac-Gleichung aufgespannten – irreduziblen Darstellung der Lorentz-Gruppe erhält der Drehimpulsoperator einen zusätzlichen, *Koordinaten-unabhängigen* Term.

Das ist die Antwort auf den zweiten Teil der eingangs gestellten Frage, nämlich der nach ‘‘Ursache und Herkunft’’ des spin.

Und was ist schlussendlich der Eigenwert des spin für ein Dirac-Feld? Dazu muss man \mathbf{W}_ρ berechnen. Setzt man den jetzt erhaltenen Ausdruck für $\mathbf{M}^{\mu\nu}$ in (17) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\rho &= \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{M}}_{\mu\rho}\mathbf{P}^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}\mathbf{M}^{\sigma\tau}\mathbf{P}^\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\rho\sigma\tau} \left[i(x^\sigma d^\tau - x^\tau d^\sigma) + \frac{1}{2}\sigma^{\sigma\tau}\right] id^\mu \\ &= \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}\sigma^{\sigma\tau}\mathbf{P}^\mu ; \end{aligned}$$

der Bahndrehimpuls ist aus \mathbf{W}_ρ (wegen der Antisymmetrie der $\epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}$!) herausgefallen.

Im Ruhesystem erhält man wieder einfach

$$\mathbf{W}_\rho|_{\text{r.s.}} = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\rho\sigma\tau}\sigma^{\sigma\tau}\mathbf{P}^0 = \frac{m}{4}\epsilon_{0\rho\sigma\tau}\sigma^{\sigma\tau} = \frac{m}{2}(0, \sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$$

\leadsto

$$\mathbf{W}^2 = \mathbf{W}_\rho \mathbf{W}^\rho|_{\text{r.s.}} = -\frac{m^2}{4} [(\sigma^{23})^2 + (\sigma^{31})^2 + (\sigma^{12})^2] = -\frac{m^2}{4} \cdot 3 = -m^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) ,$$

und der Vergleich mit (18) zeigt:

$$\text{Der spin des Dirac-Felds ist } s = \frac{1}{2} .$$