Universität Bremen **Institut für Theoretische Physik**

Theoretische Physik C.C. Noack
2001

Tensoranalysis

– eine Einführung –

Universität Bremen
Institut für Theoretische Physik

Universität Bremen **Institut für Theoretische Physik**

Theoretische Physik C.C. Noack
2001

Tensoranalysis

– eine Einführung –

Inhaltsverzeichnis

[Vers. 2.3 /ccn 20.Okt. 2001]

A Einleitung, Notationsvereinbarungen

Tensoranalysis beschäftigt sich mit für die Anwendungen in der theoretischen Physik besonders wichtigen Teilaspekten der Differentialgeometrie. Es geht dabei vor allem um drei Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Differentialrechnung:

- Betrachtung komplizierterer geometrischer Gebilde, als es der gewöhnliche dreidimensionale Euklidische Raum ist,
- Benutzung von komplizierteren Objekten, als es gewöhnliche Vektoren sind,
- Differentiation von komplizierteren Objekten, als es Funktionen einer reellen Variablen sind.

Für die Bearbeitung aller drei Fragestellungen liefert die moderne Differentialgeometrie mächtige und elegante Hilfsmittel — zum Preis eines hohen Abstraktionsgrads, der die Anwendung eben dieser Hilfsmittel auf *konkrete* physikalische Problemstellungen jedenfalls für den Anfänger ziemlich erschwert. Um es in einem modernen Bilde zu sagen: die moderne Differentialgeometrie ist ein bißchen wie das UNIX-Betriebssystem. UNIX-Experten betonen immer wieder, wie elegant und vor allem mächtig UNIX sei, aber kaum einer bestreitet seine extreme Nutzer-Unfreundlichkeit!

Physiker brauchen also in der Anwendung der Differentialgeometrie auf ihre Fragestellungen eine *für die konkrete Rechnung* geeignete Sprache. Als solche erweist sich die Tensoranalysis in der Index-Notation nach wie vor als brauchbar, auch wenn sie Mathematikern (und den Puristen unter den mathematischen Physikern) wegen einer gewissen Umständlichkeit mißfällt.

Offensichtlich aus diesem Grunde gibt es wenig für den Anfänger genügend lesbar geschriebene und gleichzeitig mathematischen Ansprüchen genügende Literatur. Die meisten Lehrbücher sind entweder zu abstrakt (Differentialgeometrie-Lehrbücher von Mathematikern) oder zu knapp (Exkurse oder Anhänge in einführenden Texten zur theoretischen Physik). Es ist das Ziel dieses Skripts, hier einen praktisch brauchbaren Mittelweg zu weisen.

Veranschaulichung, pro und contra: Im folgenden geht es um die geometrische Struktur von Räumen, die eine kompliziertere Struktur aufweisen als der gewöhnliche, Euklidische, metrische Raum $\mathbb{R}^n$. Um den Kontakt mit anschaulich-geometrischen Bildern nicht völlig zu verlieren, lohnt es sich, wenn man sich immer ein möglichst einfaches, anschauliches Beispiel vor Augen hält. Das einfachste (aber nicht triviale) solche Beispiel ist die – zweidimensionale – Kugeloberfläche, S^2 genannt, deren Geometrie jedem Physiker schon von der ständigen Benutzung sphärischer Polarkoordinaten (ϑ, φ) her wohlvertraut ist.

Bei der Benutzung eines solchen Bildes sollte man sich jedoch *möglichst davon freimachen*, S^2 als in einen gewöhnlichen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ 'eingebettet' zu denken. Eine solche 'Einbettung' erzeugt nämlich nicht nur bei der Betrachtung von höherdimensionalen gekrümmten Räumen oft unnötige begriffliche Schwierigkeiten, sondern in manchen Fällen ist die Einbettung garnicht möglich, oder eine unreflektierte Benutzung dieses Bildes kann auf Fehlschlüsse führen. Das gilt z.B. für den Begriff *Torsion* (vgl. S. E.3) und die damit verknüpfte Symmetrie-Eigenschaft der *Koeffizienten des affinen Zusammenhangs* (vgl. S. E.3); aber auch bereits für den Begriff des *Tangential-Vektorraums* auf einer Mannigfaltigkeit: stellt man sich Mannigfaltigkeit und Tangential-Vektorraum in einen höherdimensionalen Raum eingebettet vor, so kann man leicht auf die – völlig irreführende – Idee kommen, es gäbe auch nicht-tangentiale (etwa "normale" ??) Vektorräume.

A.1 Notationsvereinbarungen:

Vektor-/Tensor-Indizes: Als Indizes werden im allgemeinen Fall *kleine lateinische* Buchstaben benutzt (*kleine griechische* Buchstaben bleiben, wie in der Physik allgemein üblich, speziell dem 4-dimensionalen Minkowski-Raum bzw. dessen Verallgemeinerung in der allgemeinen Relativitätstheorie vorbehalten). Es wird streng unterschieden zwischen *oberen* (= kontravarianten) und *unteren* (= kovarianten) Indizes.

Vektoren/Tensoren: Ein im Text vorkommendes Symbol mit Indices (z.B. x^k, y_m, $T^i{}_k$) ist in der Regel als der Vektor/Tensor *selbst = Gesamtheit der Komponenten* zu verstehen. Eine Formel, in der auf der linken wie auf der rechten Seite ein Index (je einmal) vorkommt, gilt für jeden Wert des Index, stellt also (in einem N-dimensionalen Raum) einen Satz von N Gleichungen dar. Z.B. bedeutet $z^i = c \cdot x^i$ ausgeschrieben

$$z^i = c \cdot x^i \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, N \quad .$$

Vektoren (= Tensoren 1. Stufe) werden meist mit *kleinen*, Tensoren höherer Stufen mit *großen* lateinischen Buchstaben bezeichnet. Dabei haben allerdings die Buchstaben 'd' und 'D' eine spezielle Bedeutung (vgl. unten).

Steht ein Symbol wie z.B. T ganz ohne Indices für einen Tensor (was immer aus dem Kontext hervorgeht), so gilt die entsprechende Aussage sowohl für ko- wie für kontravariante Indices.

Einstein-sche Summationskonvention: Über je einen oberen und einen unteren Index ist zu summieren, wobei die Summe über die Zahl N der Dimensionen des betreffenden Raums geht.

Partielle Ableitung: Zur Schreibvereinfachung, und um etwas näher an die Notation der Differentialgeometrie heranzukommen, wird die partielle Ableitung nach der Variable x^i mit "d_i" abgekürzt[1]:

$$d_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \quad .$$

Entsprechend wird die *kovariante Ableitung* (vgl. Abschn. E) als "D_i" geschrieben.

[1] Diese Notation erweist sich als besonders sinnvoll in der Feldtheorie, in der man *Funktionen* von *Feldern* und deren Ableitungen betrachtet, die auch explizit von den Koordinaten abhängen können (ähnlich wie z.B. in der Punktmechanik die Lagrange-Funktion explizit von der Zeit abhängen kann). Die Differentiation nach dieser *expliziten* Koordinatenabhängigkeit bezeichnet man dann mit "∂_i".

B Topologische Räume. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Die Geometrie beschäftigt sich mit *räumlichen Strukturen.* Was aber ist, ganz allgemein, ein 'Raum' ?

Zunächst einmal besteht jeder Raum aus seinen Punkten, ein Raum ist also eine *Punktmenge.* Aber er ist mehr als das: im gewöhnlichen (dreidimensionalen) Euklidischen Raum z.B. ist die Rede von *Kurven, Flächen, Schnittpunkten* usw. Alle diese Begriffe haben etwas damit zu tun, daß die Punkte eines Raumes 'benachbart' oder aber 'weit voneinander entfernt' sein können.

Es ist diese Begriffsbildung der 'Nachbarschaft' von Punkten (wobei von in reellen Zahlen meßbaren 'Abständen' noch garnicht die Rede ist!), die eine bloße Punktmenge zu einem *Raum* macht. Formal geschieht das, indem man für den anschaulichen Begriff 'Umgebung eines Punktes' eine exakte Definition[2] gibt. Eine solche Definition heißt dann auch *eine Topologie auf der Menge* $\mathcal{M}$, eine Punktmenge mit einer Topologie ist ein *topologischer Raum.*

Es ist wichtig, sich klar zu machen, daß die Topologie eines Raumes keineswegs eindeutig durch die Punktmenge vorgegeben ist, sondern eine unabhängige, zusätzliche Struktur erzeugt: zu ein und derselben Punktmenge kann man viele verschiedene Topologien definieren[3].

Mit dieser Begriffsbildung kann man nun unmittelbar eine ganz natürliche und anschauliche Definition von *Stetigkeit einer Abbildung* geben: kurz gesagt bilden stetige Abbildungen *Umgebungen* in *Umgebungen* ab. Genau gilt die folgende

Definition 1 : Es seien $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{N} \subset \mathcal{Y}$ Teilmengen zweier topologischer Räume $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$
($\mathcal{X}$ kann auch identisch mit $\mathcal{Y}$ sein).
Eine Abbildung $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt im Punkt $P \in X$ *stetig*, wenn *jede* Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}$ des Bildpunkts $f(P)$ das Bild einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ von P ist.

▷ **Übung:** Man mache sich den Sinn dieser Definition anhand der (unstetigen) gewöhnlichen
Stufenfunktion klar.

Es dürfte klar sein, warum diese Definition der altmodischen "$\delta - \varepsilon$"-Gymnastik vorzuziehen ist: sie ist, obwohl doch viel anschaulicher, gleichzeitig viel allgemeiner, weil sie *kein Maßsystem* (keine 'Metrik') voraussetzt, mit dem Abstände zwischen Punkten als reelle Zahlen definiert sind.

Wir gehen nun einen Schritt weiter und versuchen, in einem topologischen Raum $\mathcal{M}$ *Koordinaten* einzuführen.

Koordinaten sind nichts anderes als Sätze von (reellen) Zahlen, mit denen wir die Punkte $P \in M$ eindeutig charakterisieren können. Wir definieren also:

Definition 2 : Ist für eine Umgebung $\mathcal{U}(P_0) \subset \mathcal{M}$ des Punktes P_0 eine *umkehrbar eindeutige, stetige* Abbildung $k : P \leftrightarrow x$ gegeben zwischen den Punkten $P \in \mathcal{U}$ und

[2] Eine *Umgebung* $\mathcal{U}(P) \in \mathcal{M}$ des Punktes P ist im wesentlichen eine offene Teilmenge der Punktmenge $\mathcal{M}$, die den Punkt P enthält.

Für die Zwecke dieses Skripts ist der *anschauliche* Begriff einer "(beliebig kleinen) Umgebung" ausreichend; allenfalls ist zu beachten, daß eine Umgebung immer eine *offene Menge* ist.

Zur genauen Definition des Begriffs "offene Menge" sei auf die mathematische Literatur verwiesen.

[3] Z.B. gibt es immer eine 'gröbste' und eine 'feinste' Topologie — bei der gröbsten Topologie ist *jede* Menge, die P enthält, eine Umgebung von P, bei der feinsten nur die ganze Menge.

Sätzen[4]

$$x := \{x^i \,|\, i = 1, \dots, N\}$$

von reellen Zahlen x^i, so nennt man die Abbildung k ein *Koordinatensystem* (genauer: eine *Karte*) in P_0, den Satz $x = \{x^i\}$ die *Koordinaten von P im Punkt P_0*.

Der so definierte Begriff *Karte* ist, wie man sieht, nichts anderes als eine mathematisch präzise Fassung des anschaulichen Begriffs einer 'Landkarte'. Man beachte, daß dazu nicht nur die Angabe der Koordinatenabbildung selbst gehört, sondern vor allem auch die Angabe der abgebildeten Umgebung!

Für ein und denselben Punkt P können offenbar verschiedene *Karten* definiert sein, z.B.

$$k : P \leftrightarrow x \quad , \qquad \tilde{k} : P \leftrightarrow \tilde{x} \quad .$$

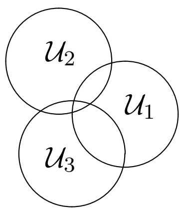
Weil beide Abbildungen aber (nach Definition) umkehrbar eindeutig und stetig sind, wird damit auch eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung *zwischen den beiden Karten* induziert, also eine *Koordinatentransformation*:

$$x(P) \leftrightarrow \tilde{x}(P) \qquad \text{für alle } P \in \mathcal{U}(P_0) \quad .$$

Definition 3 : Ist es möglich, den *ganzen Raum $\mathcal{M}$* durch ein System von *endlich vielen* Karten zu überdecken (also so, daß jeder Punkt $P \in \mathcal{M}$ auf mindestens einer Karte liegt), wobei die zugehörigen Koordinatentransformationen von Karte zu Karte – auch über mehrere Karten hinweg – umkehrbar eindeutig und stetig bleiben, so nennt man $\mathcal{M}$ eine *Mannigfaltigkeit*; das System von Karten heißt naheliegenderweise ein *Atlas*.

Für die Definition einer Mannigfaltigkeit ist wesentlich, daß der Atlas wirklich *eindeutig* wird, d.h. daß Mehrdeutigkeiten, wie sie z.B. in der Funktionentheorie bei der analytischen Fortsetzung auftreten können, *ausgeschlossen* sind.

Ein Beispiel zeigt, was gemeint ist. Es seien auf der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ drei wechselseitig überlappende Umgebungen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$ gegeben, und auf diesen Umgebungen seien die Karten



k_1, k_2, k_3 definiert. Durch diese drei Karten sind in den jeweiligen Überlappgebieten auch drei Koordinatentransformationen t_1, t_2, t_3 gegeben:

$$k_1 \underset{t_1}{\longleftrightarrow} k_2 \underset{t_2}{\longleftrightarrow} k_3 \underset{t_3}{\longleftrightarrow} k_1 \quad .$$

Haben nun, wie in der Figur gezeichnet, die drei Umgebungen einen nicht-leeren Durchschnitt $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3$, so wird dort durch die Hintereinanderausführung $t := t_3 \circ t_2 \circ t_1$ der drei Koordinatentransformationen eine Abbildung der Karte k_1 auf sich selbst induziert, die natürlich die Identität sein muß, wenn k_1 – und damit der ganze Atlas – eindeutig bleiben soll. $t = \mathbb{1}$ ist aber keineswegs immer, d.h. für beliebige Kartensysteme, erfüllt!

[4]Beachte, daß die Superskripte Indizes (und nicht etwa Potenzen!) sind — vgl. die Notationsvereinbarungen.

Definition 4 : Sind *alle* Abbildungen zwischen den überlappenden Karten eines Atlas *differenzierbar*, so nennt man $\mathcal{M}$ entsprechend eine *differenzierbare*[5] *Mannigfaltigkeit.*

Satz 1 : *Ist $\mathcal{M}$ eine Mannigfaltigkeit, so sind* **alle** *Karten durch die* **gleiche** *Zahl N von Parametern x^i gekennzeichnet, und diese Zahl ist* **für jeden möglichen Atlas die gleiche***; sie charakterisiert also die Mannigfaltigkeit in invarianter Weise.*

Definition 5 : Man nennt N natürlich die *Dimension von $\mathcal{M}$*.

▷ **Übung:** Man beweise den obigen Satz.

Wenn im folgenden nur von "Räumen" (ohne qualifizierenden Zusatz) die Rede ist, handelt es sich immer um (unendlich oft) differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

[5] In der Differentialgeometrie wird hier präzisierend noch angegeben, *wie oft* differenzierbar der Atlas sein soll. In den physikalischen Anwendungen hat man es so gut wie ausschließlich mit unendlich-oft differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ("C^∞-Mannigfaltigkeiten") zu tun.

C Differentiation auf Kurven. Der Gradient. Der Tangentialraum

Vorbemerkung: Um der Klarheit der Entwicklung willen wird in diesem Abschnitt die Einstein-sche Summationskonvention noch *nicht* benutzt; am Ende des Abschnitts wird aber deutlich geworden sein, wie sie sich auf natürliche Weise aus den Begriffsbildungen der Geometrie auf Mannigfaltigkeiten ergibt.

In einem topologischen Raum $\mathcal{M}$ lassen sich auf die übliche Weise Kurven definieren:

Definition 6 : Eine *Kurve* $\mathbf{C} \subset \mathcal{M}$ (genau: ein *Kurvenstück*) ist eine umkehrbar eindeutige, *stetige* Abbildung des Intervalls[6] $0 \leq s \leq 1$ auf Punkte $P \in \mathcal{M}$.

Es sei nun $f(P(s))$ eine auf einer solchen Kurve $\mathbf{C}$ definierte (reelle, differenzierbare) Funktion; es sei weiter $\mathcal{M}$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, und wir nehmen an, daß $\mathbf{C}$ ganz in einer Karte liegt, so daß wir also die auf der Kurve $\mathbf{C}$ liegenden Punkte durch Koordinaten $x(P(s))$ charakterisieren können.

Dann wird auch $f(P(s))$ einfach zu einer Funktion der Koordinaten, die ihrerseits vom Kurvenparameter s abhängen[7]:

$$f = f(x(s)) \quad ;$$

$f(s)$ ist also eine ganz gewöhnliche reelle Funktion einer reellen Variablen, deren Ableitung wir mit der Kettenregel berechnen können:

$$\frac{df}{ds} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i}{ds}$$

oder

$$\frac{d}{ds} f = \sum_i \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} f \quad .$$

Aus der letzten Form sieht man deutlich, daß wir den Operator $\dfrac{d}{ds}$ ganz unabhängig von der Funktion f definieren können, auf die er wirkt:

$$\frac{d}{ds} := \sum_i \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \quad ; \qquad (1)$$

dieser Operator hat also eine *auf die Kurve selbst* bezogene geometrische Bedeutung: $\frac{d}{ds}$ ist einfach eine *Tangente* an die Kurve $\mathbf{C}$ im Punkt P, also das, was man in der Physik oft auch ingesamt den "Gradienten" nennt (wir wollen in diesem Skript unter dem *Gradienten* als Operator einfach nur den 'Vektor' der partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^i}$ verstehen).

Nun gibt es für jeden Punkt P einer Mannigfaltigkeit unendlich viele verschiedenen Kurven $\mathbf{C}$, die durch P gehen, und jede solche Kurve $\mathbf{C}$ kann ihrerseits auf unendlich viele verschiedene Weisen parametrisiert werden. Folglich gibt es in jedem Punkt P einer Mannigfaltigkeit auch unendlich viele verschiedene *Tangenten.*

---

[6] Die Festlegung auf das Intervall $0 \leq s \leq 1$ ist natürlich bloße Konvention; irgendein beliebiges reelles (aber *abgeschlossenes*) Intervall würde es genauso gut tun.

[7] Wir bezeichnen hier, wie in der Physik üblich, die Funktion f immer mit demselben Buchstaben, obwohl f einmal als Funktion der Kurvenpunkte P, das zweite Mal als Funktion der Koordinaten x, ein drittes Mal als Funktion des Kurvenparameters s gemeint ist, es sich also strenggenommen um verschiedene Funktionen handelt. In der 'physikalischen' Schreibweise für Funktionen geht der Unterschied aus der jeweils angegebenen unabhängigen Variablen hervor.

Satz 2 : *Die Menge aller* Tangenten *im Punkt* $P \in \mathcal{M}$ *bildet einen* **linearen** *Vektorraum* $T_P(\mathcal{M})$*, den "Tangentialraum in* P*".*
Der Tangentialraum $T_P(\mathcal{M})$ *hat die gleiche Dimension wie* $\mathcal{M}$*.*

Dieser so anschauliche Satz ist der Grund, warum Mathematiker oft statt von "differenzieren" von "Linearisierung" reden — die Mannigfaltigkeit mit ihrer womöglich hochkomplizierten geometrischen Struktur wird *lokal* (d.h. im Punkt P) durch einen *linearen* Raum, eben den *Tangentialraum*, ersetzt.

▷ **Übung:** Man veranschauliche sich den Sachverhalt an einfachen Beispielen (z.B. für einige Mannigfaltigkeiten der Dimension 1 und 2).

Eine Möglichkeit, den obigen Satz zu beweisen, besteht darin, daß man zunächst eine Basis konstruiert, d.h. einen Satz von N linear unabhängigen Tangenten findet, und dann zeigt, daß jede Tangente geschrieben werden kann als Linearkombination dieser Basisvektoren mit geeigneten Koeffizienten. Ausformuliert heißt das:

Sei $\{\mathbf{e}_k | k = 1, \ldots, N\} \in T_P(\mathcal{M})$ eine solche Basis. Dann besagt der Satz: jeder Tangentialvektor $\mathbf{v} \in T_P(\mathcal{M})$ läßt sich schreiben in der Form

$$\mathbf{v} = \sum_k^N v^k \, \mathbf{e}_k \quad .$$

Es zeigt sich nun, daß eine solche Basis auf ganz natürliche Weise aus den Koordinaten selbst gewonnen werden kann, und zwar so:

1. es sei $\mathbf{C}(m)$ die m-te 'Koordinatenlinie' (durch P); das ist diejenige Kurve, die sich ergibt, wenn man alle Koordinaten des Punktes P außer der m-ten festhält[8],

2. die Parametrisierung der Koordinatenlinie sei so gewählt, daß die m-te Koordinate x^m *selbst* der Kurvenparameter ist. Es gilt also
$$\frac{dx^i}{ds} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. \text{für} \left\{ \begin{array}{l} i = m \\ i \neq m \end{array} \right. \quad ,$$

3. es sei $\left(\frac{d}{ds}\right)_{\mathbf{C}(m)}$ die *Tangente* längs der Koordinatenlinie $\mathbf{C}(m)$. Diese Tangente läßt sich also schreiben als
$$\left(\frac{d}{ds}\right)_{\mathbf{C}(m)} = \sum_i^N \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^m} =: d_m \quad ,$$

4. die N Gradienten $\{d_m | m = 1, \ldots, N\}$ längs den N verschiedenen Koordinatenlinien $\mathbf{C}(m)$ sind linear unabhängig,

5. wie wir oben gesehen haben, hat jede Tangente $\frac{d}{ds}$ längs einer (beliebigen) Kurve $\mathbf{C}$ durch P die Form
$$\left(\frac{d}{ds}\right)_C = \sum_i^N \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} =: \sum_i^N c^i \, d_i$$

[8] Genau genommen müßten wir die Werte der m-ten Koordinate (x^m) auf ein abgeschlossenes Intervall beschränken, um nach der obigen Definition ein *Kurvenstück* zu erhalten. Da wir aber nur an der Umgebung des Punktes P interessiert sind, kann man sich das immer so gemacht denken (man erinnere, daß es zu jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit immer eine ganze Umgebung gibt, in der Koordinaten definiert sind.).

mit der Abkürzung

$$c^i := \frac{dx^i}{ds} \quad ;$$

die N Gradienten $\{d_m | m = 1, \ldots, N\}$ bilden also in der Tat eine Basis des Tangentialraums in P (und die c^i sind die 'Komponenten' des Tangentenvektors in Bezug auf diese Basis).

Damit ist auch der obige Satz ("die Tangenten bilden einen linearen Vektorraum der Dimension N") im wesentlichen bewiesen.

Es ist wichtig, sich klarzumachen, daß in diesen ganzen Betrachtungen von 'Längen', 'Winkeln' oder 'Orthogonalität' nirgends die Rede war — diese Begriffe sind bisher ja garnicht definiert. Lediglich die Existenz von Koordinaten war eine wesentliche Voraussetzung.

Der Begriff des *Gradienten*, d.h. einer 'Differentiation', ist also bereits in sehr allgemeinen geometrischen Strukturen definierbar — daher der Name "Differentialgeometrie".

Die Schreibweise

$$\left(\frac{d}{ds}\right)_C =: \sum_i^N c^i \, d_i$$

oder auch

$$\mathbf{v} = \sum_k^N v^k \, \mathbf{e}_k$$

stellt sich insofern als redundant heraus, als die Entwicklung eines Vektors nach Basisvektoren *immer* auf eine Summe über die Komponenten (hier c^i bzw. v^k) einerseits, die Basisvektoren andererseits (hier d_i bzw. $\mathbf{e}_k$) hinausläuft. Schreibt man also konsequent Vektorkomponenten mit einem *oberen*, Basisvektoren mit einem *unteren* Index, so kann man, ohne Unklarheiten oder Zweideutigkeiten in Kauf zu nehmen, das Summenzeichen weglassen (die Summe erstreckt sich immer über die Anzahl der Basisvektoren = Dimension der Mannigfaltigkeit).

Das ist die Grundlage für die "Einstein-sche Summationskonvention", die ab jetzt immer benutzt wird.

D Koordinatentransformationen. Kontravariante und kovariante Vektorfelder

D.1 Koordinatentransformationen

Wir wollen nun *Koordinatentransformationen*

$$x(P) \leftrightarrow \tilde{x}(P) \quad ,$$

wie sie z.B. durch zwei Karten in ihrem Überlappgebiet erzeugt werden, näher betrachten. Die 'neuen' Koordinaten $\tilde{x}^i$ sind also umkehrbar eindeutige (stetige) Funktionen der 'alten' :

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x) \qquad\qquad x^k = x^k(\tilde{x}) \quad .$$

Für die Differenz der Koordinaten zweier benachbarter Punkte P' und P ergibt sich in einer Taylor-Entwicklung bis zur 1.Ordnung:

$$d\tilde{x}^i := \tilde{x}'^{\,i} - \tilde{x}^i = A^i{}_k(P)\, dx^k$$

bzw.

$$dx^k := x'^{\,k} - x^k = B^k{}_i(P)\, d\tilde{x}^i$$

mit

$$A^i{}_k(P) := \left.\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\right|_P \quad , \qquad\qquad B^k{}_i(P) := \left.\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i}\right|_P \quad .$$

Die Matrix $A^i{}_k$ heißt die *Funktionalmatrix* oder *Jacobi-Matrix* der Transformation, die Matrix $B^k{}_i$ ist die der Umkehrtransformation.

Offenbar gilt $A \circ B = B \circ A = \mathbb{1}$, oder ausgeschrieben:

$$A^i{}_j\, B^j{}_k = B^i{}_j\, A^j{}_k = \delta^i{}_k$$

($\delta^i{}_k$, das "Kronecker-Symbol", ist einfach die Einheitsmatrix in Index-Schreibweise).

Es folgt übrigens direkt aus bekannten Sätzen der Matrizenrechnung, daß $\det B = (\det A)^{-1}$.

D.2 Volumenintegration

Die Jacobi-Matrix einer Koordinatentransformationen spielt eine wichtige Rolle bei der Integration. Die Fragestellung lautet: wie rechnet man ein Volumenintegral in verschiedenen Koordinatensystemen aus? Es ist ein schönes Beispiel für die Mächtigkeit der Methoden der modernen Differentialgeometrie, wie man mit ihrer Hilfe das höchst einfache Schlußresultat auf elegante Weise aus allgemeinen Prinzipien herleiten kann.

Dennoch mag es sinnvoll sein[9], dieses Resultat auch "zu Fuß" herzuleiten.

Nehmen wir also an, wir wollen das Volumen-Integral über den Integranden $\mathbf{X}$ berechnen. Im einfachsten Fall, nämlich in einem kartesischen Koordinatensystem, haben wir dafür ein Vielfach-Integral zu bilden:

$$I := \int d\tau\, \mathbf{X} = \int dx^1\, dx^2\, \ldots\, dx^N\, \mathbf{X} \quad ;$$

mit andern Worten: das 'Volumenelement' $d\tau$ kann man schreiben als

$$d\tau = dx^1\, dx^2\, \ldots\, dx^N = \prod_i^N dx^i \quad .$$

[9] Vgl. die Bemerkung über UNIX auf S. 1 !

Im allgemeinen (d.h. auf einer Mannigfaltigkeit) wird $d\tau$ einen von Punkt zu Punkt veränderlichen 'Maß-Faktor' enthalten:

$$d\tau = \prod_i^N dx^i \cdot \sigma(x) \quad ,$$

doch bleibt es immer bei einem Vielfach-Integral über alle N Koordinaten.

Wie rechnet sich das Volumenelement bei einer Koordinatentransformation um? Das sieht man am einfachsten, wenn man sukzessive eine Variable nach der anderen nach den Regeln der gewöhnlichen (eindimensionalen) Integralrechnung substituiert (wobei alle anderen festzuhalten sind).

Wir substituieren also zunächst dx^N, wobei alle anderen x^i festzuhalten sind:

$$\begin{aligned}
dx^1 &= B^1{}_k \, d\tilde{x}^k \stackrel{!}{=} 0 \\
&\vdots \\
dx^{N-1} &= B^{N-1}{}_k \, d\tilde{x}^k \stackrel{!}{=} 0 \\
dx^N &= B^N{}_k \, d\tilde{x}^k \quad .
\end{aligned}$$

Das bedeutet nun aber keineswegs, daß die $\tilde{x}^i$ festzuhalten sind; vielmehr sagen die obigen Gleichungen (ganz im Sinne von mechanischen 'Zwangsbedingungen') gerade, *wie* die 'neuen' Koordinaten sich zu verändern haben, wenn die 'alten' konstant bleiben sollen. Das obige lineare Gleichungssystem läßt sich sehr einfach nach $d\tilde{x}^N$ auflösen; wir erhalten

$$\begin{aligned}
d\tilde{x}^N &= \frac{\begin{vmatrix} B^1{}_1 & B^1{}_2 & \cdots & B^1{}_{(N-1)} & 0 \\ B^2{}_1 & B^2{}_2 & \cdots & B^2{}_{(N-1)} & 0 \\ & & \vdots & & \\ B^{N-1}{}_1 & B^{N-1}{}_2 & \cdots & B^{N-1}{}_{(N-1)} & 0 \\ B^N{}_1 & B^N{}_2 & \cdots & B^N{}_{(N-1)} & dx^N \end{vmatrix}}{\det B} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} B^1{}_1 & B^1{}_2 & \cdots & B^1{}_{(N-1)} \\ B^2{}_1 & B^2{}_2 & \cdots & B^2{}_{(N-1)} \\ & & \vdots & \\ B^{N-1}{}_1 & B^{N-1}{}_2 & \cdots & B^{N-1}{}_{(N-1)} \end{vmatrix}}{\det B} \cdot dx^N \quad ,
\end{aligned}$$

also

$$dx^N = \frac{\det B^{(N)}}{\det B^{(N-1)}} \cdot d\tilde{x}^N \quad ,$$

wobei $\det B^{(k)}$ die Determinante aus den ersten k Zeilen und Spalten der Funktionalmatrix B bezeichnet.

Wir haben so als Zwischenresultat

$$d\tau = \prod_i^{N-1} dx^i \cdot \frac{\det B^{(N)}}{\det B^{(N-1)}} \cdot d\tilde{x}^N \cdot \sigma(x) \quad .$$

Für die nächste Integration nach dx^{N-1} kann man nun völlig analog substituieren; man muß jetzt aber selbstverständlich, neben den x^i für $i = 1, \ldots, (N-2)$, *auch* $\tilde{x}^N$ festhalten. Die $\det B^{(N-1)}$ kürzt sich heraus, und es folgt

$$d\tau = \prod_i^{N-2} dx^i \cdot \frac{\det B^{(N)}}{\det B^{(N-2)}} \cdot d\tilde{x}^{N-1} \cdot d\tilde{x}^N \cdot \sigma(x) \quad .$$

Durch einfache vollständige Induktion erhält man schließlich als Endresultat

$$d\tau = \prod_k^N d\tilde{x}^k \cdot \det B \cdot \sigma(x) \quad ,$$

was man auch in der einprägsamen Form[10]

$$d\tau = \prod_k^N d\tilde{x}^k \cdot \left| \frac{dx^i}{d\tilde{x}^k} \right| \cdot \sigma(x)$$

schreiben kann; in Worten: das Volumenelement ist mit der *inversen Funktionaldeterminante* (Jacobi-Determinante) der Koordinatentransformation $x \longrightarrow \tilde{x}$ zu multiplizieren.

Selbstverständlich muß ebenso wie der eigentliche Integrand $\mathbf{X}$ auch der Maßfaktor σ auf das 'neue' Koordinatensystem umgerechnet werden.

Wie aus dem Beweis ersichtlich, gilt diese praktisch so wichtige Formel *in beliebigen Koordinatensystemen*. Aber auf noch ein anderes Nebenprodukt ist hinzuweisen: hat man (im gewöhnlichen Euklidischen Raum) die gewöhnliche Volumendefinition, für die der Maßfaktor $\sigma = 1$ ist, so gibt die Formel auf einfache Weise den Maßfaktor für ein krummliniges Koordinatensystem!

▷ **Übung:** Man berechne den Maßfaktor σ für ebene und für räumliche Polarkoordinaten (Flächen- bzw. Volumenintegral) .

D.3 Transformationsverhalten von skalaren und vektoriellen Funktionen

Nachdem wir mit der Jacobi-Matrix eine explizite Schreibweise für Koordinatentransformationen gewonnen haben, können wir auch andere Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ als nur die Koordinaten selbst parametrisieren. Wir beginnen mit 'Skalaren':

Definition 7 : Es sei $P \in \mathcal{M}$, und für *jede* Karte (d.h. jedes Koordinatensystem x) in P sei eine (reelle) Funktion[11] $\Phi_{(x)}(P)$ definiert.
Ist $\Phi_{(x)}(P)$ unabhängig vom Koordinatensystem, d.h. gilt

$$\Phi_{(\tilde{x})}(P) = \Phi_{(x)}(P) \quad ,$$

so nennt man Φ einen *Skalar* in P .

Ist $\Phi(P)$ nicht nur im Punkt P, sondern für eine ganze Umgebung $\mathcal{U}(P)$ (oder auch für ganz $\mathcal{M}$) definiert, so nennt man Φ ein skalares *Feld* auf $\mathcal{U}$ (bzw. $\mathcal{M}$).

Definition 8 : Es sei $P \in \mathcal{M}$, und für *jede* Karte (d.h. jedes Koordinatensystem x) in P seien N (reelle) Funktionen[12] ${a_{(x)}}^i(P), i = 1, \ldots, N$ definiert.

[10] Hier ist natürlich bei dem Index k *keine Summationskonvention* impliziert — es handelt sich ja um eine Determinante! (Und der Versuchung, für diesen Fall eine "Produktkonvention" einzuführen, sollte man tunlichst widerstehen . . .)

[11] In physikalischen Texten wird die (definitorische) Abhängigkeit einer Funktion $\Phi_{(x)}(P)$ vom Koordinatensystem x in der Schreibweise meist unterdrückt: man schreibt einfach $\Phi(P)$ (bzw. $\tilde{\Phi}(P)$, wenn gemeint ist, daß $\Phi(P)$ in Bezug auf das Koordinatensystem $\tilde{x}$ definiert sein soll). In dieser Kurzschrift gilt dann für einen Skalar in P

$$\tilde{\Phi}(P) = \Phi(P) \quad ,$$

was zwar kürzer, aber nicht unbedingt verständlicher ist.

[12] Auch hier wird in physikalischen Texten für ${a_{(x)}}^i(P)$ meist einfach $a^i(P)$ geschrieben. Die Vektor-Transformationseigenschaft schreibt sich dann

$$\tilde{a}^i(P) = {A^i}_k(P) \cdot a^k(P) \quad .$$

Gilt dann

$$a_{(\tilde{x})}{}^{i}(P) = A^{i}{}_{k}(P) \cdot a_{(x)}{}^{k}(P) \quad ,$$

so heißt $a^i(P)$ ein (reeller) *kontravarianter Vektor* in P .

Entsprechend wie beim Skalarfeld nennt man eine vektorwertige Funktion auf einer Umgebung $\mathcal{U}$ (bzw. ganz $\mathcal{M}$) ein Vektor*feld* [13] auf $\mathcal{U}$ bzw. $\mathcal{M}$.

Wie transformiert sich nun der oben schon betrachtete *Gradient* eines skalaren Felds? Das rechnet man sofort aus. In Kurzschrift ist der Gradient im 'alten' Koordinatensystem $d\Phi$, im 'neuen' $\tilde{d}\tilde{\Phi}$; ausgeschrieben ist das

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_i\, \Phi_{(\tilde{x})}(P) \quad &:= \quad \frac{\partial \Phi_{(\tilde{x})}(P)}{\partial \tilde{x}^i} \\
&= \quad \frac{\partial \Phi_{(x)}(P)}{\partial \tilde{x}^i} \\
&= \quad \frac{\partial \Phi_{(x)}(P)}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial \Phi_{(x)}(P)}{\partial x^k}\, B^k{}_i(P) \\
&=: \quad \left[d_k\, \Phi_{(x)}(P) \right] \cdot B^k{}_i(P) \quad ;
\end{aligned}$$

der Gradient transformiert sich also *nicht* wie ein Tangentenvektor (genau: wie die Komponenten eines Tangentenvektors), sondern eben mit der *inversen Transformationsmatrix*, also wie die Basisvektoren des Tangentialraums — ein Ergebnis, das im Grunde zu erwarten war, wenn man bedenkt, daß die Komponenten des Gradienten ja gerade eine Basis im Tangentialraum darstellen. Es ist aber ein weiterer Anlaß, sorgfältig zwischen oberen und unteren Indizes zu unterscheiden und zusätzlich zu definieren:

Definition 9 : Es sei $P \in \mathcal{M}$, und für *jede* Karte (d.h. jedes Koordinatensystem x) in P seien N (reelle) Funktionen[14] $b_{(x)}{}_{i}(P), i = 1, \ldots, N$ definiert.

Gilt dann

$$b_{(\tilde{x})}{}_{i}(P) = b_{(x)}{}_{k}(P) \cdot B^{k}{}_{i}(P) \quad ,$$

so heißt $b_i(P)$ ein (reeller) *kovarianter Vektor* in P (bzw. ein Vektorfeld).

Die Differentiation nach den *kontravarianten* Koordinaten ergibt einen *kovarianten* Vektor; unsere Notation $d_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ ist also konsistent.

[13]Diese Begriffsbildung ist weniger harmlos als sie scheint. Während z.B. der Satz "das Skalarfeld $\Phi(P)$ ist konstant" einen unzweideutigen Sinn hat, nämlich

$$\Phi(P') = \Phi(P) \qquad \text{für alle } P, P'$$

woraus auch $d_m\Phi = 0$ folgt, gilt ähnliches für ein Vektorfeld *nicht ohne weiteres*. Denn während das Skalarfeld noch unmittelbar als Funktion der Punkte $P \in \mathcal{M}$ selbst, ohne Bezugnahme auf irgendwelche Koordinaten, angesehen werden kann, scheinen in der Definition eines Vektorfelds die Koordinaten eine wesentliche Rolle zu spielen.

Zwar kann man mit Hilfe der Definition des (kontravarianten) Vektors in jedem festen Punkt P von einem Koordinatensystem zum andern umrechnen, *nicht aber von einem Punkt zum andern*; und das ist ein nicht-triviales Problem, weil sich auch die Funktionalmatrix A von einem Punkt zum andern ändert.

So scheint es z.B. auch nicht unzweideutig klar zu sein, was man unter einem 'konstanten Vektorfeld' verstehen soll; die naive Definition

$$a^i(P') = a^i(P) \qquad \text{für alle } P, P'$$

wäre in hohem Maß von der Wahl des Koordinatensystems abhängig (Beispiel: "(a_x, a_y, a_z) ist konstant in kartesischen Koordinaten" ist etwas völlig anderes als "$(a_r, a_\vartheta, a_\varphi)$ ist konstant in Polarkoordinaten" !).

Es ist der ganze Sinn der Einführung einer "kovarianten Ableitung" (vgl. Abschn. E), diesen Sachverhalt klar zu formulieren.

[14]Wieder ist die Kurzschrift einfach $b_i(P)$.

Zur Mnemotechnik: *Kovariante* Vektoren transformieren sich wie die *Basisvektoren* des Koordinatensystems, daher “kovariant”; *kontravariante* Vektoren transformieren sich ‘entgegengesetzt’ dazu, daher “kontravariant”.

Es zeigt sich hier auch, wie zweckmäßig in mnemotechnischer Hinsicht die Schreibweise mit oberen/unteren Indizes im Zusammenhang mit der Leibniz-schen Notation des Differentialquotienten ist: ein oberer Index “rutscht beim differenzieren nach unten”, denn das Differential steht “im Nenner”.

▷ **Übung:** Wie wir gesehen haben, kann man eine Tangente an eine Kurve $\mathbf{C} \subset \mathcal{M}$ im Punkt P durch den Ausdruck

$$\left(\frac{d}{ds}\right)_C = \frac{dx^i}{ds}\, d_i$$

beschreiben.

Man überzeuge sich[15] noch einmal explizit davon, daß in dieser Formel

die Komponenten	:	$\frac{dx^i}{ds}$	ein	**kontravarianter Vektor** ,
der Gradient	:	d_i	ein	**kovarianter Vektor** ,
die Tangente	:	$\left(\frac{d}{ds}\right)_C$	ein	**Skalar**

ist.

D.4 Tensoren

Der Begriff *Vektor/Vektorfeld* (ko- oder kontravariant) läßt sich leicht auf Funktionen mit mehr als einem Index verallgemeinern. In Anlehnung an den ‘Dehnungs’- bzw. ‘Spannungstensor’ der Elastomechanik nennt man solche Objekte *Tensoren.*

Definition 10 : Ein *(kovarianter/kontravarianter/gemischter) Tensor k-ter Stufe* $F^{i,j,k,\ldots}_{r,s,t,\ldots}$ ist ein Satz von N^k Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, der sich unter einem Wechsel des Koordinatensystems wie folgt transformiert:

- in Bezug auf *jeden oberen Index* transformiert sich F wie ein kontravarianter Vektor,
- in Bezug auf *jeden unteren Index* transformiert sich F wie ein kovarianter Vektor.

Z.B. lautet also die Transformationsformel für einen kovarianten Tensor 2. Stufe, F_{ik} :

$$\tilde{F}_{ik} = F_{mn}\, B^m{}_i\, B^n{}_k \quad ,$$

für einen gemischten Tensor 3.Stufe, F^{ik}_m :

$$\tilde{F}^{ik}_m = A^i{}_r\, A^k{}_s\, F^{rs}_t\, B^t{}_m \quad .$$

Für viele praktische Anwendungen von besonderer Nützlichkeit ist das sogenannte “**Quotiententheorem**”, das hier in seiner einfachsten Form angegeben sei:

[15] Vor allem die letzte Aussage ist für Physiker gewöhnungsbedürftig — sehen sie doch in der üblichen Schreibweise $\vec{v} = {}_k\, v_k\, \vec{e}_k$ üblicherweise immer $\vec{v}$ (und nicht die Komponenten v_k) als “den Vektor” an. Die hier benutzte Sprechweise ist aber nicht nur näher an der der Differentialgeometrie, sie ist auch physikalisch logischer: denn eine “Richtung im Raum” (nichts anderes ist $\frac{d}{ds}\;{}_C$, oder allgemein $\vec{v}$) hat doch einen geometrisch wohldefinierten, vom Koordinatensystem *unabhängigen* Sinn, oder ? Vgl. auch die Bemerkungen zu Gl. 1.

Satz 3 : *Sei $f(i,P)$ ein Satz von N Funktionen von $P \in \mathcal{M}$. Wenn dann gilt: für* **jeden** *kontravarianten Vektor a^i ist*

$$b := \sum_i^N f(i,P)\, a^i$$

ein **Skalar***, so ist $f(i,P) \equiv f_i(P)$ ein* **kovarianter Vektor***.*

Das Theorem gilt in ganz analoger Weise auch für andere Fälle (Ko- und Kontravarianz, Tensoren höherer Stufe usw.).

▷ **Übung:** Man beweise das Quotiententheorem in der obigen Form.

▷ **Übung:** Man beweise das Quotiententheorem in der Form:

Ist $F(i,k)$ ein Satz von N^2 Funktionen von P, und ist für jeden *kovarianten* Vektor a

$$b^i := \sum_k^N F(i,k)\, a_k$$

kontravariant, so ist $F(i,k) \equiv F^{ik}$ ein *kontravarianter* Tensor 2. Stufe .

Die N^k Komponenten eines Tensors k-ter Stufe müssen nicht notwendig immer alle voneinander unabhängig sein. Hat z.B. ein Tensor eine bestimmte Symmetrie bei der Vertauschung von Indizes, so verringert sich natürlich die Zahl seiner unabhängigen Komponenten.

▷ **Übung:** Wieviele unabhängige Komponenten hat ein *antisymmetrischer* [16] kontravarianter Tensor 2. Stufe (auf einer Mannigfaltigkeit der Dimension N) ?

Besonders wichtig – sowohl mathematisch wie physikalisch – sind antisymmetrische Tensoren 2.Stufe, die aus 2 Vektoren aufgebaut sind. Sie werden meist als *äußeres Produkt* oder *'wedge'-Produkt* [17] bezeichnet:

$$(a \wedge b)^{ik} := a^i\, b^k - b^i\, a^k \quad .$$

Im Spezialfall des dreidimensionalen Euklidischen Raumes ist das nichts anderes als das sogenannte 'Vektorprodukt'; wie man aber schon aus der Zahl seiner unabhängigen Komponenten für verschiedene Raumdimensionen sieht, ist das 'Vektorprodukt' eigentlich kein Vektor, sondern eben ein antisymmetrischer Tensor. Seine geometrische Interpretation ist auch eine ganz andere als die eines gewöhnlichen Vektors: während dieser (für jede Dimension!) die Richtung einer *Kurve* (d.h. also einer *ein*dimensionalen Untermannigfaltigkeit) im Raum beschreibt, beschreibt das äußere Produkt die Lage einer *Fläche* (also einer *zwei*dimensionalen Untermannigfaltigkeit) im Raum. *Nur im Dreidimensionalen* kann man die Lage einer Fläche im Raum durch Angabe einer *Richtung* beschreiben, weil nur im Dreidimensionalen eine Fläche gleichzeitig eine *Hyper*fläche (d.h. eine $(N-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit) ist ! Daß der geometrische Unterschied zwischen einem gewöhnlichen ('polaren') Vektor und dem Vektorprodukt ('axialer Vektor') selbst für Physikanfänger wichtig ist, meint auch Feynman [18].

---

[16] "Antisymmetrisch" heißt: der Tensor wechselt sein Vorzeichen bei Vertauschung seiner beiden Indizes.

[17] Auch dies läßt sich ohne Schwierigkeiten auf 'wedge'-Produkte von mehr als zwei Vektoren verallgemeinern; in der Literatur sind dabei allerdings unterschiedliche Normierungsfaktoren üblich.

In engem Zusammenhang hiermit steht der Begriff der 'Differentialformen' (das 'wedge'-Produkt aus 2 Vektoren ist ein Spezialfall einer '2-Form'), der in der modernen Formulierung der Differentialgeometrie eine zentrale Rolle spielt — wir wollen ihn in diesem Skript trotzdem vermeiden (vgl. noch einmal die Bemerkung über UNIX auf S. 1) .

[18] R.P. Feynman, *The Feynman Lectures*, Bd. I, Kap. 20–1 .

E Kovariante Ableitung und der "affine Zusammenhang"

Wie wir gesehen haben, ist der Gradient eines Skalarfelds ein kovariantes Vektorfeld.

Dies verallgemeinernd könnte man nun vermuten, daß z.B. der Gradient eines kontravarianten Vektorfelds ein gemischter Tensor 2. Stufe sei. Das ist aber im allgemeinen *nicht der Fall*; vielmehr zeigt eine solche Größe überhaupt kein tensorielles Transformationsverhalten mehr! Man rechnet nämlich sofort aus:

$$\begin{aligned}(\tilde{d}_i\,\tilde{a}^k) &= B^m{}_i \cdot d_m(A^k{}_n\,a^n)\\ &= B^m{}_i \cdot A^k{}_n(d_m\,a^n) + B^m{}_i \cdot a^n\,(d_m\,A^k{}_n) \quad .\end{aligned}$$

Wie man sieht, verhält sich zwar der erste Term wie ein (gemischter) Tensor 2. Stufe, die Ortsabhängigkeit der Funktionalmatrix A aber erzeugt einen Zusatzterm, der den Tensorcharakter (die "Kovarianz") des Ausdrucks zerstört. Deshalb ist z.B. auch der Ausdruck $b^i\,(d_i\,a^k)$ *kein kontravarianter Vektor*, wie man zunächst vermuten könnte; es gilt ja, wie eben gezeigt,

$$\begin{aligned}\tilde{b}^i\,(\tilde{d}_i\,\tilde{a}^k) &= A^i{}_r\,b^r\,B^m{}_i \cdot \left\{A^k{}_n\,(d_m\,a^n) + a^n\,(d_m\,A^k{}_n)\right\}\\ &= b^m\,\left\{A^k{}_n\,(d_m\,a^n) + a^n\,(d_m\,A^k{}_n)\right\} \quad .\end{aligned}$$

Bemerkenswert ist aber, daß der Zusatzterm, der die Kovarianz zerstört, *keine Differentiation des Vektorfelds selbst* enthält, sondern nur die Transformationsmatrix A differenziert [19], also offenbar etwas mit der Struktur der Mannigfaltigkeit selbst (bzw. der auf ihr definierten Karten) zu tun hat. So findet man z.B., daß man mit der Identität

$$d_m\,A^k{}_n := d_m\left(\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^n}\right) \equiv d_m\,d_n\,\tilde{x}^k = d_n\,d_m\,\tilde{x}^k \equiv d_n\left(\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^m}\right) =: d_n\,A^k{}_m$$

den Zusatzterm eliminieren kann, indem man a und b vertauscht und subtrahiert: der Ausdruck

$$b^i\,(d_i\,a^k) - a^i\,(d_i\,b^k)$$

ist ein *kontravarianter Tensor*:

$$\tilde{b}^i\,(\tilde{d}_i\,\tilde{a}^k) - \tilde{a}^i\,(\tilde{d}_i\,\tilde{b}^k) = A^k{}_n\,\{b^m(d_m\,a^n) - a^m(d_m\,b^n)\} \quad .$$

▷ **Übung:** Man rechne dieses Ergebnis Schritt für Schritt nach.

Der hier dargestellte Sachverhalt ist natürlich nicht befriedigend. Es liegt deshalb nahe, nach einer geeigneten *Verallgemeinerung des Gradientenbegriffs* (auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit) zu suchen, nämlich nach einer "kovarianten Ableitung", D. Von ihr ist zu verlangen:

(i) D ist – als Operator – ein *kovarianter Vektor*,

(ii) D ist *linear*: $D(\alpha a + \beta b) = \alpha \cdot (D\,a) + \beta \cdot (D\,b)$,

(iii) D erfüllt – angewandt auf beliebige Tensorfelder a, b – die Produktregel der Differentiation ("Leibniz-Regel"): $D(ab) = (D\,a) \cdot b + a \cdot (D\,b)$.

[19] Man sieht daran zugleich, daß dieser störende Zusatzterm nur auftritt, wenn die Koordinatentransformation von Punkt zu Punkt *verschieden* ist.

Die Forderungen (ii) und (iii) sorgen dafür, daß die üblichen Regeln der Differentialrechnung auch für die kovariante Ableitung gültig bleiben. Allerding gilt durchaus nicht immer [20]

$$D_i\, D_k \stackrel{?}{=} D_k\, D_i \quad .$$

Natürlich möchte man, daß D im Fall gewöhnlicher kartesischer Koordinaten in einem gewöhnlichen Euklidischen Raum D der gewöhnliche Gradient d ist. Daraus, aus dem oben diskutierten Transformationsverhalten von $d_i\, a^k$ und aus der Linearitätsforderung (ii) gewinnt man den Ansatz

$$\begin{array}{lcl} \text{für ein Skalarfeld} \quad \Phi & : & D_i \Phi = d_i \Phi \quad , \\ \text{für ein Vektorfeld} \quad a^k & : & D_i\, a^k = d_i\, a^k + \Gamma^k{}_{ji}(P) \cdot a^j \quad , \end{array}$$

mit noch näher zu bestimmenden [21] Koeffizienten $\Gamma^k{}_{ji}(P)$.

▷ **Übung:** Man zeige, daß dieser Ansatz die Forderungen (ii) und (iii) erfüllt.

Für die kovariante Ableitung eines kontravarianten *Tensors* F^{jk} ergibt sich dann die etwas kompliziert aussehende, aber einfach zu verstehende Formel [22]

$$D_i\, F^{jk} = d_i\, F^{jk} + \Gamma^j{}_{mi}(P)\, F^{mk} + \Gamma^k{}_{mi}(P)\, F^{jm} \quad ,$$

sowie die entsprechenden Verallgemeinerungen für kontrvariante Tensoren höherer Stufe.

Einen Ausdruck für die kovariante Ableitung *kovarianter Vektoren* leitet man sich leicht aus

$$D_i\,(a^k\, b_k) = d_i\,(a^k\, b_k) = a^k\,(D_i\, b_k) + (D_i\, a^k)\, b_k$$

her; man findet

$$D_i\, a_k = d_i\, a_k - \Gamma^j{}_{ki}(P) \cdot a_j$$

sowie die entsprechenden Verallgemeinerungen für kovariante und schließlich gemischte Tensoren höherer Stufe.

▷ **Übung:** Man leite diese Formel explizit her (Quotiententheorem!) .

Trotz der – traditionell üblichen, aber eigentlich unkorrekten! – Schreibweise mit oberen und unteren Indizes samt Summationskonvention sind die Koeffizienten $\Gamma^k{}_{ji}(P)$ *keine*

[20] Man kann (an Beispielen) zeigen, daß die Vertauschbarkeit der gemischten kovarianten Ableitungen im allgemeinen *nicht* mit (i) bis (iii) verträglich ist.

[21] Schon an dieser Stelle sei aber angemerkt, daß ohne weitere Vorgaben über diese Koeffizienten nichts weiter ausgesagt werden kann — sie stellen gewissermaßen eine *Definition* dessen dar, was man unter einer ‘Ableitung’ in der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ verstehen will.

Da die ‘Ableitung’ aber offenbar etwas damit zu tun hat, wie differenzierbare (Vektor- und Tensor-) Funktionen sich von Punkt zu Punkt ändern, spiegeln die Koeffizienten des affinen Zusammenhangs die *geometrische Struktur der Mannigfaltigkeit* wider.

Das wird im Abschn. E.1 ausführlich behandelt werden.

[22] Um sich das plausibel zu machen, denke man sich F^{jk} in eine Summe aus Produkten von zwei Vektoren entwickelt:

$$F^{jk} = \sum_n a^j(n) \cdot b^k(n) \quad ,$$

und wende hierauf die Leibniz-Regel (iii) an. Die Voraussetzungen, unter denen eine solche Entwicklung möglich ist, sind ähnlich allgemein wie die für die Existenz der Fourier-Transformierten einer Funktion.

Für einen strengen Beweis sei auf die Lehrbücher verwiesen.

Tensoren. Ihr Transformationsverhalten kann man aus der Kovarianzforderung (i) für D_i ausrechnen:

$$\begin{aligned}\tilde{D}_i\,\tilde{a}^k := \tilde{d}_i\,\tilde{a}^k + \tilde{\Gamma}^k_{ji}\,\tilde{a}^j &= B^n{}_i \cdot \left\{A^k{}_m \cdot (d_n\,a^m) + a^m\,(d_n\,A^k{}_m)\right\} + \tilde{\Gamma}^k_{pi}\,A^p{}_m \cdot a^m \\ &\stackrel{!}{=} A^k{}_r\,B^n{}_i \cdot (D_n\,a^r) := A^k{}_r\,B^n{}_i \cdot \{(d_n\,a^r) + \Gamma^r{}_{mn}\,a^m\} \\ &= A^k{}_r\,B^n{}_i \cdot (d_n\,a^r) + A^k{}_r\,B^n{}_i\,\Gamma^r{}_{mn}\,a^m \quad ;\end{aligned}$$

hieraus folgt

$$\tilde{\Gamma}^k_{ji} = B^m{}_j\,B^n{}_i\,\left\{A^k{}_r\,\Gamma^r{}_{mn} - d_n\,A^k{}_m\right\} \quad . \tag{2}$$

Die Koeffizienten Γ heißen die *Koeffizienten des affinen Zusammenhangs* (englisch: “affine connections”). Man kann auch sagen:

Definition 11 : Sind in einer Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ (bzw. in ganz $\mathcal{M}$) Koeffizienten Γ mit den in Gl. 2 formulierten Transformationseigenschaften gegeben, so stellen sie in $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ (bzw. $\mathcal{M}$) einen *affinen Zusammenhang* her.

und

Definition 12 : Ist in Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ (bzw. in ganz $\mathcal{M}$) *affiner Zusammenhang* gegeben, so heißt

$$D_i\,a^k := (d_i\,a^k) + \Gamma^k{}_{ji}(P) \cdot a^j$$

die *kovariante Ableitung* des Vektorfelds a^k in P .

E.1 Geometrische Interpretation des affinen Zusammenhangs

Wir haben bei der Einführung der *kovarianten Ableitung* eines Vektorfelds a^k zunächst einfach ‘drauflosdifferenziert’, ohne uns Gedanken darüber zu machen, ob das einen Sinn ergibt. Wie wir aber schon aus Anlaß der Definition 8 auf S. 14 festgestellt haben, genügt es nicht, anzunehmen, die *Komponenten* $\{a^k | k = 1, \ldots, N\}$ seien *einzeln* differenzierbare Funktionen [23] der Koordinaten in P. Wir müssen *zusätzlich* sicherstellen, daß das Differenzieren *unabhängig vom Koordinatensystem* zu konsistenten Ergebnissen führt.

Das aber wird gerade mit der *Kovarianz* von D_i erreicht. Wir sind also jetzt in der Lage, die folgende einleuchtende Definition für die Differenzierbarkeit eines Vektorfelds zu geben:

Definition 13 : Auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ sei in $P \in \mathcal{M}$ eine Karte gegeben, d.h. in einer Umgebung $\mathcal{U}(P) \subset \mathcal{M}$ soll ein Koordinatensystem gegeben sein. Es sei weiter in $\mathcal{U}$ ein *affiner Zusammenhang* vorgegeben, und damit dort die *kovariante Ableitung* D_i definiert.
Sei nun a^k ein Vektorfeld auf $\mathcal{U}$, und $P' \in \mathcal{U}$ ein zu P benachbarter Punkt. Dann heißt a^k *differenzierbar in* P, wenn gilt

$$a^k(P') = a^k(P) + \left.(D_i\,a^k)\right|_P \cdot dx^i + \mathcal{O}(dx^2) \quad .$$

Diese Definition [24] erfüllt offenbar alle Anforderungen, die man sinnvollerweise an den Begriff “differenzierbares Vektorfeld” zu stellen hat; vor allem

1. die Definition ist *kovariant*, d.h. die gleiche Formel gilt in jedem Koordinatensystem,

[23] Selbstverständlich ist das immer eine (in der Physik stillschweigende) *notwendige* Voraussetzung für Differenzierbarkeit.
[24] Sie ist wirklich eine *Definition*, und nicht etwa ein Satz!

2. die Definition geht im Fall kartesischer Koordinaten ($\Gamma \equiv 0$, also $D_i = d_i$) in die gewöhnliche Taylor-Formel, d.h. in die gewöhnliche Definition von Differenzierbarkeit über,

3. wegen der Eigenschaften von D_i (Linearität, Leibniz-Regel) bleiben auch die Vektoralgebra-Eigenschaften erhalten: ist
$$c^k(P) = \alpha \cdot a^k(P) + \beta \cdot b^k(P) \quad ,$$
so folgt
$$c^k(P') = \alpha \cdot a^k(P') + \beta \cdot b^k(P') \quad .$$

In Abschn. C hatten wir gesehen, daß zu jedem Punkt $P \in \mathcal{M}$ ein eigener Vektorraum, der *Tangentialraum* $T_P(\mathcal{M})$, gehört, lauter Vektorräume also, die nichts miteinander zu tun haben. Jetzt sieht man, wie mit Hilfe der kovarianten Ableitung ein *Zusammenhang* gestiftet wird zwischen 'benachbarten' Vektorrräumen. Die 3. der obigen Eigenschaften zeigt, daß der Zusammenhang zwischen dem Vektorraum in P und dem in P' ein *affiner* ist — daher der Name "affiner Zusammenhang".

Die Formel
$$D_i\, a^k := (d_i\, a^k) + \Gamma^k{}_{ji}(P) \cdot a^j$$
zeigt, daß die Änderung eines Vektorfelds von Punkt zu Punkt sich aus zwei Anteilen zusammensetzt, die man anschaulich interpretieren kann:

- der erste Teil, $(d_i\, a^k)$, 'mißt' die Änderung des Felds *an sich*, während
- der zweite Teil, $\Gamma^k{}_{ji}(P) \cdot a^j$, die Änderung des Felds angibt, die durch die Änderung der Koordinaten von Punkt zu Punkt zustandekommt.

Man sieht hier noch einmal, warum der Ausdruck "konstantes Vektorfeld" in einer nicht-Euklidischen Geometrie keinen besonderen Sinn ergibt[25]. Man kann allerdings in der Tat Vektorfelder betrachten, für die (in einem *vorgegebenen Koordinatensystem*!) in einem Punkt P die gewöhnliche Ableitung $(d_i\, a^k) = 0$ ist, für die also die einzige Änderung beim Übergang von P nach P' die Änderung $\Gamma^k{}_{ji}(P)\, a^j$ ist. Diese "geometrische" Änderung des Vektorfelds von Punkt zu Punkt nennt man nach H. Weyl[26] manchmal eine "Vektortransplantation".

Es gibt eine weitere Veranschaulichung der kovarianten Ableitung, die allerdings nur dann Sinn ergibt, wenn die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in einen (höherdimensionalen) Euklidischen Raum eingebettet ist:

Es sei a ein Vektorfeld auf $\mathcal{M}$, d.h. $a(P)$ ist ein Element des Tangentialraums $T_P(\mathcal{M})$ an $\mathcal{M}$ in P. Man betrachte nun eine Kurve $\mathbf{C}(s) \subset \mathcal{M} \subset \mathbf{E}$. Dann kann man <u>in $\mathbf{E}$</u> die gewöhnliche (Euklidische) Ableitung des Vektorfelds a längs $\mathbf{C}$ gemäß
$$\frac{da^k}{ds} = \frac{dx^i}{ds} \cdot \frac{\partial a^k}{\partial x^i}$$
bilden. $\frac{da}{ds}$ ist aber im allgemeinen in $\mathcal{M}$ *nicht mehr tangential*, liegt also *gar nicht* in $T_P(\mathcal{M})$! Bildet man aber die *Projektion*
$$\left.\frac{da}{ds}\right|_{T_P(\mathcal{M})}$$

[25] Dieser Begriff wird daher in der Literatur – soweit er überhaupt benutzt wird – auch nicht einheitlich definiert.

[26] Überhaupt stammen wesentliche Teile dieser ganzen Analyse – einschl. ihrer Übertragung auf die Feldtheorien der Physik! – von H. Weyl. Siehe hierzu auch N. Straumann, *Phys. Blätt.* **43**, 414 (1987).

von $\frac{da}{ds}$ auf den Tangentialraum, so ist diese Projektion eine auf $T_P(\mathcal{M})$ wohldefinierte Größe. *Das ist gerade die kovariante Ableitung* :

$$\frac{Da^k}{ds} := \left.\frac{da^k}{ds}\right|_{T_P(\mathcal{M})} = (D_i\, a^k) \cdot \frac{\partial a^k}{\partial x^i} \quad .$$

Aus der Konstruktion geht hervor, daß diese Definition von der speziellen Wahl der Koordinaten unabhängig, also kovariant ist.

Dies läßt sich an einem ganz einfachen, wohlbekannten Beispiel demonstrieren. Dazu zunächst eine Vorbemerkung:

Allgemein können wir jeden Vektor $\mathbf{v} \in T_P(\mathcal{M})$ (für einen festen Punkt P) schreiben als $\mathbf{v} = v^k \cdot \mathbf{e}_k$, wobei $\mathbf{e}_k$ Basisvektoren für $T_P(\mathcal{M})$ sind. Dann ist [27]

$$d\mathbf{v} = D\mathbf{v} = (D\, v^k) \cdot \mathbf{e}_k + v^k \cdot (D_k \mathbf{e}_k) \quad ;$$

von einem vernünftigen (lokalen) Koordinatensystem müssen wir aber verlangen, daß der zweite Term verschwindet, denn nur dann wird ja der Ausdruck $(D\, v^k)$ kovariant.

Wir betrachten nun als Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ einen Kreis, der in die (Euklidische) Ebene $\mathbb{R}^2$ eingebettet ist; als Kurve $\mathbf{C}$ den Kreis selbst (anders geht es für $N = 1$ nicht!), als Vektorfeld $a(P)$ den Einheitsvektor in φ-Richtung. $\mathbf{e}_\varphi$ ($\mathbf{e}_\varphi$ ist sowohl als Element von $T_P(\mathcal{M})$ wie als Element von $\mathbb{R}^2$ ortsabhängig).

Aus ${\mathbf{e}_\varphi}^2 = 1$ folgt $\mathbf{e}_\varphi \cdot d\,\mathbf{e}_\varphi = 0$, d.h. die Projektion von $d\,\mathbf{e}_\varphi$ auf die Kreistangente verschwindet. Das aber heißt $D\,\mathbf{e}_\varphi = 0$; $\mathbf{e}_\varphi$ eignet sich also als Basisvektor eines lokalen Koordinatensystems. Man beachte $D\,\mathbf{e}_\varphi 0 =$, aber $d\,\mathbf{e}_\varphi \neq 0$!

E.2 Woher kennt man den affinen Zusammenhang?

Es ist wichtig für ein wirkliches Verständnis der ganzen Tensoranalysis, sich noch einmal klarzumachen, daß in allen bisherigen Überlegungen von einer “Metrik” nicht die Rede war. Wir haben zwar Gebrauch gemacht von Begriffen wie “Umgebung”, “Nachbarschaft” und damit von “Stetigkeit”; wir haben Koordinaten eingeführt und differenzierbare Funktionen betrachtet; aber in all dem kam das Wort “Abstand” (als ein *quantitatives* Maß für die Entfernung zweier Punkte) *nicht vor.*

Ohne einen quantitativen Abstandsbegriff ist auch *garnicht von vorneherein festgelegt*, was man unter der Änderung einer Funktion (hier eines Vektorfeldes) von Punkt zu Punkt quantitativ zu verstehen hat. Mit andern Worten: man ist weitgehend frei darin, wie man eine differenzierbare Mannigfaltigkeit durch Einführung eines affinen Zusammenhangs mit einer weiteren geometrischen Struktur versehen will; lediglich das Transformationsverhalten Gl. 2 (S. 19) beim Übergang von einem Koordinatensystem zu einem andern muß gewährleistet sein, wenn anders die kovariante Ableitung wirklich *kovariant* sein soll (woraus dann auch die Sätze 4 – 8 folgen).

In dieser Situation gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

entweder (a) man gibt die *Koeffizienten des affinen Zusammenhangs*, die ${\Gamma^k}_{ji}$, *willkürlich* vor [28]. Dann *folgt daraus*, was man unter $D_i\, a^k$ – geometrisch gesprochen also: unter der Änderung eines Vektorfelds von Punkt zu Punkt – zu verstehen hat. Die differenzierbare Mannigfaltigkeit wird so zu einer *affinen* Mannigfaltigkeit (oft kurz “affiner Raum” genannt),

[27] Man beachte Fußnote 15 auf S. 15 !

[28] Wie gerade angemerkt geht das völlig willkürlich nur in *einem* (herausgegriffenen) Koordinatensystem — in allen andern ergeben sich die Γ dann aus Gl. 2.

oder (b) man hat aus einer *anderen Quelle* (z.B. aus einem *Abstandsbegriff* à la Riemann[29], aus der Physik oder sonstwo her) bereits einen Begriff davon, was man unter $D_i\, a^k$ zu verstehen hat; *das legt dann die Koeffizienten des affinen Zusammenhangs* (ganz oder teilweise) *fest.* Geometrisch heißt das, daß man von vorneherein *mehr* über den betrachteten Raum weiß als nur, daß es sich um eine differenzierbare Mannigfaltigkeit handelt.

In den meisten Lehrbüchern wird dieser im Grunde so einfache Sachverhalt dadurch verwirrt, daß man mit intuitiven Beispielen entsprechend **(b)** anfängt, um dann plötzlich (ohne es ausdrücklich zu sagen) zu **(a)** überzugehen!

E.3 Weitere Eigenschaften des affinen Zusammenhangs; Torsion und Krümmung

Wie wir soeben festgestellt haben, kann man ohne weitere Vorgaben (außer der Transformationsformel Gl. 2) nichts weiter über den *affinen Zusammenhang* aussagen. Insbesondere haben die Koeffizienten *keine* von vorneherein festgelegte Symmetrieeigenschaft bei Vertauschung ihrer Indizes. Aus dem Transformationsverhalten liest man jedoch folgende einfache Tatsachen ab:

Satz 4 : *den Euklidischen Fall (A konstant, daher $D = d$) erhält man für $\Gamma \equiv 0$,*

Satz 5 : *die Symmetrie bzw. Nicht-Symmetrie bzgl. der beiden unteren Indizes ist eine* invariante *Eigenschaft. Soll heißen: gilt ${\Gamma^k}_{ij} = {\Gamma^k}_{ji}$ [bzw. ${\Gamma^k}_{ij} \neq {\Gamma^k}_{ji}$] in* einem *Koordinatensystem, so gilt es in* allen[30]*,*

Satz 6 : *gilt ${\Gamma^k}_{ij} \neq {\Gamma^k}_{ji}$ in* einem *Koordinatensystem, so gibt es* kein *Koordinatensystem, in dem $\Gamma \equiv 0$ ist,*

Satz 7 : *jede Differenz zweier verschiedener Γ (d.h. ${\Gamma^k}_{ji} - {(\Gamma')^k}_{ji}$) ist ein Tensor (mit dem durch die Stellung der Indizes gegebenen Transformationsverhalten),*

Satz 8 : *die antisymmetrische Kombination $({\Gamma^k}_{ji} - {\Gamma^k}_{ij})$ ist ein Tensor.*

▷ **Übung:** Man beweise die obigen Sätze.

Den Tensor

$$ {T^k}_{ji} := {\Gamma^k}_{ji} - {\Gamma^k}_{ij} $$

nennt man auch *die Torsion*[31].

Mit Hilfe des Torsionstensors kann man den Satz 6 sehr viel einfacher und klarer formulieren:

---

[29] Vgl. Abschn. F .

[30] Beweis: der zweite, nicht von Γ abhängige Term in Gl. 2 ist symmetrisch in den unteren Indizes.

[31] In der Differentialgeometrie pflegt man die *Torsion* etwas anders zu definieren, und zwar um der 'indexfreien Notation' willen: man definiert nämlich einen "Vektor der Torsion" $T^i(a,b)$ durch

$$ \begin{aligned} T^i(a,b) &:= (a^k\, D_k b^i - b^k\, D_k a^i) - (a^k\, d_k b^i - b^k\, d_k a^i) \\ &= a^i\, b^j \quad {\Gamma^k}_{ji} - {\Gamma^k}_{ij} \qquad , \end{aligned} $$

wobei a, b irgend zwei Vektorfelder sind.
Das ist natürlich der Sache nach nichts wesentlich anderes.

Satz 6 : *Wenn die Torsion nicht verschwindet, gibt es kein Koordinatensystem, in dem* $\Gamma \equiv 0$ *ist.*

In dieser Formulierung – und noch klarer mit dem Satz von Levi-Civita [32] – zeigt sich besonders deutlich, daß die Torsion etwas mit der geometrischen Struktur der Mannigfaltigkeit selbst zu tun hat.

Wie oben schon erwähnt, verschwindet der “Kommutator” der kovarianten Ableitungen

$$[\,D_i, D_k\,] := D_i\,D_k - D_k\,D_i$$

im allgemeinen *nicht.* Wie die Torsion charakterisiert auch dieser Operator bestimmte Eigenschaften der betrachteten Mannigfaltigkeit [33], auch er hat deshalb einen Namen. Allerdings erweist es sich als nützlich, eine (nur leicht) anders definierte Größe einzuführen, und zwar aus folgendem Grunde:

Man betrachte zunächst die Größe

$$[\,D_i, D_j\,]\,(\Phi\,a^k) \quad ,$$

wobei Φ ein Skalarfeld, a^k ein Vektorfeld ist. Man rechnet dann aus:

$$[\,D_i, D_j\,]\,(\Phi\,a^k) = (\,[\,D_i, D_j\,]\,\Phi\,)\cdot a^k + \Phi\cdot\Big([\,D_i, D_j\,]\,a^k\Big)$$

und

$$\begin{aligned}
[\,D_i, D_j\,]\,\Phi &:= (D_i\,D_j - D_j\,D_i)\,\Phi = D_i\,d_j\,\Phi - D_j\,d_i\,\Phi \\
&= d_i\,d_j\,\Phi - \Gamma^m{}_{ji}\,d_m\,\Phi - (d_j\,d_i\,\Phi - \Gamma^m{}_{ij}\,d_m\,\Phi) \\
&= (d_i\,d_j - d_j\,d_i)\,\Phi - \Gamma^m{}_{ji}\,d_m\,\Phi + \Gamma^m{}_{ij}\,d_m\,\Phi \\
&= (\Gamma^m{}_{ij} - \Gamma^m{}_{ji})\cdot d_m\,\Phi = (\Gamma^m{}_{ij} - \Gamma^m{}_{ji})\cdot D_m\,\Phi \\
&=: T^m{}_{ij}\,D_m\,\Phi \quad ;
\end{aligned}$$

hier kommt also gerade die Torsion heraus. Definiert man daher den Operator

$$R_{ij} := [\,D_i, D_j\,]\; - T^m{}_{ij}\,D_m \quad ,$$

so hat dieser die (aus mehreren Gründen nützliche) Eigenschaft

$$R_{ij}\,(\Phi\,a^k) = \Phi\cdot(R_{ij}\,a^k) \quad ,$$

d.h. der Operator behandelt ein Skalarfeld “wie eine Konstante”. R_{ij} heißt *Krümmungsoperator* [34], aus Gründen, die im nächsten Abschnitt klar werden sollten.

$\triangleright$ **Übung:** Man rechne alles nach!

---

[32] Vgl. Abschn. F.2 .

[33] Vgl. hierzu Abschn. F.

[34] Auch hier definieren die Mathematiker meist leicht anders, nämlich

$$R(a,b) := a^i\,b^j\,[\,D_i, D_j\,] - T^m(a,b)\,D_m \quad ;$$

die Anwendung dieses Operators auf ein drittes Vektorfeld c und skalare Multiplikation mit einem vierten(!) – diesmal kovarianten – Vektorfeld d ergibt dann den “Riemann-schen Krümmungstensor” in ‘Mathematiker-Schreibweise’ :

$$R(a,b,c,d) := c_k\,R(a,b)\,d^k \quad .$$

F Riemann-sche Mannigfaltigkeiten. Der Satz von Levi-Civita

Alles bisherige hatte keinerlei Gebrauch gemacht von irgendeiner (quantitativen) "Abstands"-Definition. Es ist auch wichtig zu verstehen, wie dem Begriff "differenzierbares Vektorfeld auf einer *affinen Mannigfaltigkeit*" ohne einen derartigen Abstandsbegriff ein wohldefinierter Sinn gegeben werden kann.

In vielen Fällen (besonders in der Physik) weiß man über die der Beschreibung zugrundeliegende Mannigfaltigkeit jedoch mehr. Die Angabe einer "Metrik" ist dann der nächste Schritt in der Spezifizierung einer geometrischen Struktur.

In einem Euklidischen Raum gilt der "Pythagoras" — der Abstand zwischen zwei Punkten P und P' mit den Koordinaten x bzw. x' ist gegeben durch

$$ds := \sqrt{\sum_i^N (dx_i)^2} \qquad \text{mit } dx_i := {x'}_i - x_i \quad .$$

Eine *Metrik* ist nichts weiter als eine (*lokale*) Verallgemeinerung dieser Formel:

Definition 14 : Eine *Metrik* auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist eine *skalare* Funktion der Punkte $P \in \mathcal{M}$ von der Form

$$ds^2(P) := g_{ik}(P) \cdot dx^i \, dx^k \quad ,$$

mit den Eigenschaften

(a)	$g_{ik} = g_{ki}$	[g ist *symmetrisch*]
(b)	$ds^2 \geq 0 \quad \forall P \quad ;$	
	aus $ds^2 = 0$ folgt $dx^i = 0$	[g ist *positiv-definit*]
(c)	g ist invertierbar, d.h. $\forall P$ existiert $g^{ik}(P)$	
	mit der Eigenschaft $g_{ij}\, g^{jk} = {\delta_i}^k$	[g ist *nicht-entartet*]

Definition 15 : Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit , auf der eine *Metrik* definiert ist, heißt *Riemann-sche Mannigfaltigkeit* oder *Riemann-scher Raum*[35].

Man beweist leicht die folgenden Sätze:

Satz 9 : g_{ik} *ist ein* **kovarianter Tensor** (der sogen. *"Riemann-sche metrische Tensor"*).

Satz 10 : *Sind a, b kontravariante Vektoren, so ist $a^i\, g_{ik}\, b^k$ ein* **Skalar**.

[35] Manche Autoren machen einen Unterschied zwischen einem "metrischen Raum", in dem nur (b) und (c) gelten, und einem "Riemann-schen Raum", in dem zusätzlich auch (a) gilt.
Räume, in denen (a) *nicht* gilt, spielen nicht nur in der modernen Elementarteilchenphysik eine wichtige Rolle (in den sogen. "supersymmetrischen Theorien"), sondern bereits in der gewöhnlichen klassischen Mechanik (dort als "symplektische Geometrie"). Solch eine *nichtsymmetrische Metrik* läßt sich natürlich nicht mehr einfach als "Abstand zweier benachbarter Punkte" geometrisch interpretieren; sie kann aber trotzdem ein nützliches Objekt sein!

Ist (b) nicht erfüllt (z.B. im "Minkowski-Raum" der speziellen Relativitätstheorie), so spricht man auch von einer "pseudo-Riemann-schen Metrik". Gilt (b), so folgt (aus der Definitheit von g) auch (c); aus diesem Grund wird (c) in vielen Lehrbüchern nicht eigens als Bestandteil der Definition aufgeführt. Im pseudo-Riemann-schen Fall ist (c) aber eine unabhängige Forderung (die natürlich erfüllt sein muß, wenn der Raum auch in metrischer Hinsicht N-dimensional sein soll).

In vielen praktisch wichtigen Fällen kommt es auch vor, daß der metrische Tensor in *isolierten* Punkten *nicht invertierbar* ist (Beispiel: gewöhnliche Polarkoordinaten an den Polen). Das ändert solange an den allgemeinen Resultaten nichts, wie man nur solche Karten betrachtet, die diese "singulären" Punkte *nicht enthalten*. Für die singulären Punkte selbst kann man dann meist geeignete Spezialüberlegungen anstellen.

Satz 11 : *Ist a ein* kontravarianter *Vektor, so ist* $a_i := g_{ik}\, a^k$ *ein* **kovarianter Vektor**.

Entsprechende Sätze gelten für die zu g_{ik} inverse Matrix g^{ik}.

▷ **Übung:** Man beweise diese sechs Sätze.

Besonders Satz 11 ist bemerkenswert. Zunächst ist rein formal zu beachten, daß, wenn auf einer Mannigfaltigkeit ein *kontravarianter* Vektor a gegeben ist, zwar das Zeichen a^i eine festgelegte Bedeutung hat, das Zeichen a_i aber *noch 'frei'* ist. Der Satz zeigt nun zunächst einmal, daß es sinnvoll und konsistent ist, dieses Zeichen für den Ausdruck $g_{ik}\, a^k$ zu vergeben. Zweitens aber erlaubt der Satz eine *Neuinterpretation des Skalarprodukts*: während bisher (in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit *ohne Metrik*) nur Produkte von jeweils einem kovarianten mit einem kontravarianten Vektor einen Skalar ergaben, erlaubt jetzt die Umformung

$$a^i\, b_i = g_{ik}\, a^i\, b^k = g^{ik}\, a_k\, b_i \quad ,$$

ein skalares Produkt zwischen zwei Vektoren *desselben Typs*, also aus dem *gleichen Vektorraum*[36] zu definieren, das überdies im Euklidischen Fall[37] zu dem gewöhnlichen Skalarprodukt der naiven Vektorrechnung wird.

Die Technik, mit Hilfe des metrischen Tensors g_{ik} aus einem kontravarianten Vektor einen kovarianten, mit der Inversen g^{ik} aus einem kovarianten einen kontravarianten Vektor zu machen, heißt in der Tensoranalysis recht plastisch "Index ziehen". Sie läßt sich natürlich in völlig analoger Weise auch auf Tensoren höherer Stufe anwenden.

▷ **Übung:**

Aus ästhetischen Gründen – wegen der Analogie zur Schreibweise der Matrizenrechnung, bei der die Matrix üblicherweise links vom Vektor steht – definiert man üblicherweise $a_i := g_{ik}\, a^k$ [und nicht $a_k := a^i\, g_{ik}$], $a^i := g^{ik}\, a_k$ [und nicht $a^k := a_i\, g^{ik}$], obwohl die jeweils andere Definition genauso gut möglich wäre.

1. Man zeige, daß die beiden alternativen Definitionsmöglichkeiten für eine Riemann-sche Metrik (d.h. g ist symmetrisch) identisch sind,

2. man zeige, daß die beiden alternativen Definitionsmöglichkeiten für eine *nicht*-Riemann-sche Metrik (d.h. g ist *nicht* symmetrisch) *nicht* identisch sind.

F.1 Konsequenzen für die kovariante Ableitung

Was läßt sich in einem Riemann-schen Raum über die kovariante Ableitung sagen?

Dazu berechnet man wieder die Ableitung eines Skalarprodukts, $D_i\,(a^k\, b_k)$:

$$\begin{aligned} D_i\,(a^k\, b_k) &= b_k\,(D_i\, a^k)) + a^k\,(D_i\, b_k) \\ &= b_k\,(D_i\, a^k) + a^k\,(D_i\, g_{km}\, b^m) \\ &= b_k\,(D_i\, a^k) + a^k\, g_{km}\,(D_i\, b^m) + a^k\, b^m\,(D_i\, g_{km}) \quad ; \end{aligned}$$

nach $a^k\, b^m\,(D_i\, g_{km})$ aufgelöst ergibt sich

$$a^k\, b^m\,(D_i\, g_{km}) = a^k\,(D_i\, b_k) - a^k\, g_{km}\,(D_i\, b^m) \quad ,$$

[36] Vom Standpunkt der modernen Differentialgeometrie aus ist das alles ein bißchen sehr vereinfacht formuliert. Schön saubere Formulierungen führen zunächst die kovarianten Vektoren als 'Linearformen' auf $T_P(\mathcal{M})$ ein, definieren so einen zu $T_P(\mathcal{M})$ *dualen* Vektorraum und erzeugen schließlich mit Hilfe der Metrik einen *Isomorphismus* zwischen beiden. Das Ergebnis all dieses Formalismus' ist das hier dargestellte.

[37] Wie der 'Pythagoras' zeigt, ist die 'Euklidische Metrik' einfach die Einheitsmatrix.

woraus folgt (a ist ein beliebiges Vektorfeld) :

$$b^m \, (D_i \, g_{km}) = (D_i \, b_k) - g_{km} \, (D_i \, b^m) \quad .$$

Soll die kovariante Ableitung wirklich *kovariant* sein, so müssen die Regeln für das Indexziehen auch für D_i gelten; d.h. es muß (wieder für jedes b) die Identität

$$(D_i \, b_k) = g_{km} \, (D_i \, b^m)$$

gelten. Das aber bedeutet nichts anderes, als daß man in einem Riemann-schen Raum an die kovarianten Ableitung *zusätzlich* zu den Forderungen (i) bis (iii) auf S. 17 die Bedingung[38]

(iv) $D_i \, g_{km} \equiv 0$

zu stellen hat.

Die Forderung (iv) hat zur Folge, daß man die Ableitung eines Skalarprodukts sehr einfach so schreiben kann:

$$D_i \, (a^k \, b_k) = a_k \, (D_i \, b^k) + b_k \, (D_i \, a^k) \quad .$$

▷ **Übung:** Man rechne das explizit nach, und überzeuge sich dabei davon, daß zur Umrechnung tatsächlich die Existenz der Metrik *und* die Forderung (iv) benötigt wird.

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned} D_i \, (a^k \, b_k) &= a_k \, (d_i \, b^k) + \Gamma^k{}_{ji} \cdot b^j \, a_k \\ &\quad + b_k \, (d_i \, a^k) + \Gamma^k{}_{ji} \cdot a^j \, b_k \quad ; \end{aligned}$$

auf der anderen Seite aber ist

$$\begin{aligned} D_i \, (a^k \, b_k) &= d_i \, (a^k \, b_k) = d_i \, (a^k \, g_{kj} \, b^j) \\ &= g_{kj} \, b^j \, (d_i \, a^k) + a^k \, b^j \, (d_i \, g_{kj}) + a^k \, g_{kj} \, (d_i \, b^j) \quad ; \end{aligned}$$

der Vergleich ergibt

$$\Gamma^k{}_{ji} \left(a^j \, b_k + a_k \, b^j \right) = a^k \, b^j \, (d_i \, g_{kj})$$

oder (nach einigem Indexziehen und -umbenennen) schließlich

$$g_{in} \, \Gamma^n{}_{km} + g_{kn} \, \Gamma^n{}_{im} = d_m \, g_{ik} \tag{3}$$

als *Bedingungen für die Koeffizienten des affinen Zusammenhangs* in einem Riemann-schen Raum.

F.2 Der Satz von Levi-Civita

Die Gleichungen 3 stellen (wegen $g_{ik} = g_{ki}$) einen Satz von $\frac{1}{2}N(N+1) \cdot N$ linearen Bestimmungsgleichungen für die N^3 Koeffizienten des affinen Zusammenhangs dar. Auch durch die zusätzliche Forderung (iv) ist also der affine Zusammenhang in einem Riemann-schen Raum (außer im – trivialen – Fall $N = 1$) noch *nicht* eindeutig festgelegt.

Fordert man allerdings *zusätzlich* noch, daß auch die *Torsion verschwindet*, daß also die Koeffizienten Γ *symmetrisch* in den beiden unteren Indizes sind :

(v) $T^k{}_{ji} := \Gamma^k{}_{ji} - \Gamma^k{}_{ij} \equiv 0 \quad ,$

[38] "Identisch verschwinden" soll heißen: für alle Werte der Indizes und in einer ganzen Umgebung $\mathcal{U}(P) \subset \mathcal{M}$ — praktisch bedeutet letzteres immer auf ganz $\mathcal{M}$.

so gilt der berühmte "Satz von Levi-Civita" :

Satz 12 : *In einem Riemann-schen Raum ist der affine Zusammenhang durch die Forderungen* (i) *bis* (v) **eindeutig bestimmt.**

Die Koeffizienten *dieses* affinen Zusammenhangs heißen auch die *Christoffel-Symbole 1. Art* [39] und werden mit einem speziellen Symbol bezeichnet:

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ j\ \ i \end{matrix} \right\} := \Gamma^k{}_{ji} \qquad \begin{array}{l}\text{für einen affinen Zusammenhang,} \\ \text{der die Bedingungen (i) bis (v) erfüllt.}\end{array} \quad .$$

Für den Beweis des Satzes von Levi-Civita (und für viele andere Rechnungen nützlich sind die *Christoffel-Symbole 2.Art*, bei denen der obere Index 'gezogen' ist:

$$[\,ij,\,k\,] := g_{km} \left\{ \begin{matrix} m \\ i\ \ j \end{matrix} \right\} \quad .$$

Mit diesen schreiben sich die Bestimmungsgleichungen 3 in der Form

$$[\,im,\,k\,] + [\,km,\,i\,] = d_m\, g_{ik} \quad , \tag{4}$$

und die Forderung (v) wird zu

$$[\,ij,\,k\,] = [\,ji,\,k\,] \quad .$$

Letzteres sind $\frac{1}{2}N(N-1)\cdot N$ Gleichungen (die Torsion ist antisymmetrisch in den unteren Indizes); zusammen haben wir also N^3 Bestimmungsgleichungen für die N^3 gesuchten Koeffizienten.

Die explizite Lösung – und damit den Beweis des Satzes – erhält man durch zweimaliges Umbenennen von Indizes in Gl. 4, Addition, Subtraktion der ursprünglichen Gleichung, und Benutzung der durch die Forderung (v) gegebenen Symmetrie:

$$\begin{array}{rcll} [\,mi,\,k\,] + [\,ki,\,m\,] &=& d_i\, g_{mk} & \qquad [\,i \leftrightarrow m\,] \\ [\,ik,\,m\,] + [\,mk,\,i\,] &=& d_k\, g_{im} & \qquad [\,k \leftrightarrow m\,] \\ -[\,im,\,k\,] - [\,km,\,i\,] &=& -d_m\, g_{ik} & \qquad [\,i \leftrightarrow m\,] \end{array}$$

ergibt

$$2\Gamma_{mik} := 2[\,ik,\,m\,] = d_i\, g_{mk} + d_k\, g_{im} - d_m\, g_{ik} \quad .$$

Für den affinen Zusammenhang ergibt sich also

$$2\Gamma^m{}_{ik} = 2 \left\{ \begin{matrix} m \\ i\ \ k \end{matrix} \right\} = 2g^{mn} \cdot [\,ik,\,n\,] = g^{mn}\ (d_i\, g_{nk} + d_k\, g_{in} - d_n\, g_{ik}) \quad . \tag{5}$$

F.3 Geometrische Bedeutung

Zwei wichtige Sachverhalte beleuchten die geometrische Bedeutung des affinen Zusammenhangs im Fall eines Riemann-schen Raumes:

Satz 13 : *Es sei* **M** *eine Riemann-sche Mannigfaltigkeit (der Dimension N'), die in einen Euklidischen Raum* **E** *(der Dimension $N > N'$) so eingebettet ist, daß sich die Metrik in* **M** *einfach durch Einschränkung der Euklidischen Metrik in* **E** *auf* **M** *ergibt. Dann verschwindet die* **Torsion T** *auch auf* **M***.*

[39] Es ist aber festzuhalten, daß die *Koeffizienten des affinen Zusammenhangs* und die *Christoffel-Symbole 1.Art* grundsätzlich durchaus *verschieden definiert* sind und *nur* im Spezialfall eines Riemann-schen Raums übereinstimmen. Wegen dieser Übereinstimmung aber werden sie in manchen Lehrbüchern (vor allem solchen über Tensoranalysis für Physiker) leider nicht auseinandergehalten.

Beweis: In **E** ist definitionsgemäß $\Gamma \equiv 0$, also auch die Torsion $T \equiv 0$. Die Einbettung von **M** in **E** bedeutet nichts anderes, als daß mindestens ein Koordinatensystem in **E** existiert, in dem alle $P \in \mathbf{M}$ beschrieben werden durch

$$x^i = \text{ const.} \quad \text{für } i = N'+1, N'+2, \ldots, N \quad .$$

In diesem Koordinatensystem verschwindet also die Torsion auch auf **M**.

Nun ist nach Satz 5 die Eigenschaft der Torsion, zu verschwinden oder nicht, eine *invariante* Eigenschaft, sie gilt also in allen Koordinatensystemen auf **M** — also ist immer $T \equiv 0$. ∎

Als Beispiel für diesen Satz denke man wieder an die Kugeloberfläche $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Im $\mathbb{R}^3$ ist die Metrik gegeben durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \quad ;$$

die Einschränkung von $\mathbb{R}^3$ auf S^2 induziert also auf S^2 die Metrik

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \quad ,$$

und in diesem Koordinatensystem auf dem $\mathbb{R}^3$ (Kugelkoordinaten) werden alle Punkte $P \in S^2$ beschrieben durch $r = \text{const.}$

Der Satz erklärt auch, warum in manchen Büchern, in denen die Eigenschaften des affinen Zusammenhangs mit anschaulichen Argumenten "hergeleitet" werden, die Symmetrie der Christoffel-Symbole 'herauszukommen' scheint, obwohl sie doch, wie gezeigt, eine *zusätzliche Forderung* darstellt.

Noch wichtiger ist der folgende

Satz 14 : *Der Satz von Levi-Civita ist* **nicht umkehrbar**.

Anders ausgedrückt: bei gegebener Metrik ist der affine Zusammenhang in Form von (gewöhnlichen) *Ableitungen* des metrischen Tensors gegeben:

$$2\Gamma^m{}_{ik} = g^{mn}\,[\,ik,\, n\,] = g^{mn}\,(d_i\, g_{mk} + d_k\, g_{im} - d_m\, g_{ik}) \quad ;$$

im umgekehrten Fall wären also die Komponenten des metrischen Tensors, die g_{ik}, *Integrale* der Γ's.

Der Satz besagt also: *nicht jeder* affine Zusammenhang – selbst bei verschwindender Torsion – ist *integrierbar* in dem Sinne, daß die Komponenten des metrischen Tensors aus denen des affinen Zusammenhangs berechnet werden können.

Mehr noch: es können keine (stetigen) Integrabilitätsbedingungen (etwa analog zu den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen bei partiellen Differentialgleichungen) angegeben werden, an denen man die Existenz oder Nicht-Existenz einer zu dem gegebenen affinen Zusammenhang gehörigen Metrik ablesen könnte.

F.4 Ein Beispiel

Den Beweis von Satz 14 kann man am besten durch Angabe eines Gegenbeispiels [40] führen:

Es sei in einem zweidimensionalen Raum **M** mit den Koordinaten

$$x := (x^0, x^1) := (t, r)$$

[40] Dieses merkwürdige Gegenbeispiel stammt von K. Horneffer (Antrittsvorlesung Göttingen 196?).

eine Riemann-sche Metrik explizit gegeben durch

$$ds^2 := \sin(\alpha\Phi) \cdot dt^2 + e^{\alpha\Phi} \cdot dr^2$$

oder

$$g_{ik} := \begin{pmatrix} \sin(\alpha\Phi) & 0 \\ 0 & e^{\alpha\Phi} \end{pmatrix} \quad ;$$

hierbei ist α ein (nicht negativer) Parameter, und $\Phi := e^{t^2/2}$.

Aufgrund von Gl. 5 berechnet man daraus die Koeffizienten des affinen Zusammenhangs zu

$$\Gamma^0{}_{ik} = \frac{t}{2} \frac{\alpha\Phi}{\sin(\alpha\Phi)} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha\Phi) & 0 \\ 0 & -e^{-\alpha\Phi} \end{pmatrix} \quad , \quad \Gamma^1{}_{ik} = \frac{t}{2} (\alpha\Phi) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Sei nun umgekehrt ein *affiner Raum* mit den angegebenen Γ's vorgegeben; dann folgt für $\alpha \neq 0$ (nach Konstruktion) die Existenz und Eindeutigkeit einer Metrik [41], nämlich gerade der oben angegebenen.

Für $\alpha \to 0$ aber erhält man einerseits

$$\Gamma^0{}_{ik} = \frac{t}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \Gamma^1{}_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

also einen wohldefinierten affinen Zusammenhang; der metrische Tensor andererseits geht über in

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

also eine singuläre Matrix, die keine Inverse besitzt. Es gibt also für $\alpha = 0$ *keine* (nichtentartete) *Metrik*.

Da aber sowohl die Γ's wie die g_{ik} *stetig differenzierbar* von α abhängen, kann es auch keine differentielle Bedingung für die Γ's geben, die für $\alpha \neq 0$ die Existenz und Eindeutigkeit einer Metrik, für $\alpha = 0$ aber die Nicht-Existenz einer Metrik ergeben.

[41] Daß die Torsion verschwindet, Forderung (v) also erfüllt ist, kann man – im Sinne einer Rechenprobe – noch einmal explizit an der Symmetrie der beiden oben angegebenen Matrizen ablesen.

G Literatur

Die Fülle der Lehrbücher in diesem Gebiet ist selbstverständich groß, die hier gegebene Liste stellt daher nur eine sehr beschränkte und zudem subjektiv begründete Auswahl dar.

Sie zerfällt in drei Kategorien:

1. reine Mathematikbücher, die aber für theoretische Physiker noch ganz lesbar sind,
2. der "mathematischen Physik" zuzuordnende Bücher, die also – jedenfalls im Prinzip – *physikalische Anwendungen* im Auge haben, aber matrhematischen Ansprüchen an Strenge der Formulierung genügen (wollen),
3. rein 'physikalische' Bücher — das sind meistens solche zur Relativitätstheorie.

Schließlich sind noch – 'außer Konkurrenz' – der "Klassiker" von Herrmann Weyl und zwei neuere Sekundärartikel zu Weyl's Arbeiten angegeben.

Mathematikbücher:

W. M. Boothby:
An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry,
Academic Press, New York 1975

* R. L. Bishop, S. I. Goldberg:
Tensor Analysis on Manifolds,
Dover Publications, New York 1980

Bücher der mathematischen Physik:

M. Göckeler, T. Schücker:
Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity,
Cambridge University Press, New York 1987

* Bernard F. Schutz:
Geometrical Methods of Mathematical Physics,
Cambridge University Press, Cambridge 1980

** C. T. J. Dodson, T. Poston:
Tensor Geometry: the Geometric Viewpoint and its Uses
Pitman Publ., London 1977

Physikbücher:

* CH. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler:
Gravitation,
W. H. Freeman and Co., San Francisco 1973

** R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer:
Introduction to General Relativity,
McGraw-Hill Co., New York 1975

Herrmann Weyl:

*** H.Weyl:
Space – Time – Matter (1918),
reprint: Dover Publications, New York 1952

D. Speiser:
Herrman Weyl 1885 – 1955,
Physikalische Blätter **42**, 39 (1986)

N. Straumann:
Zum Ursprung der Eichtheorien bei Herrman Weyl,
Physikalische Blätter **43**, 414 (1987)

Die Sterne haben eine ähnliche Bedeutung wie im Michelin-Führer:

*** :** "eine gute Mahlzeit"

**** :** "lohnt einen Umweg"

***** :** "eine eigene Reise wert"